PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

BUKU SEKOLAH bse ELEKTRONIK

Mahir Mengembangkan Kemampuan Matematika

untuk Kelas XI
Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah
Program Ilmu Pengetahuan Alam

Wahyudin Djumanta
R. Sudrajat

2

Mahir Mengembangkan Kemampuan Matematika
untuk Kelas XI SMA/MA Program Ilmu Pengetahuan Alam
Wahyudin Djumanta dan R. Sudrajat

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Mahir Mengembangkan Kemampuan Matematika

untuk Kelas XI
Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah
Program Ilmu Pengetahuan Alam

Wahyudin Djumanta
R. Sudrajat

2

Mahir Mengembangkan Kemampuan Matematika
untuk Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah Kelas XI
Program Ilmu Pengetahuan Alam

Penulis	:	Wahyudin Djumanta R. Sudrajat
Penyunting	:	Tim Setia Purna Inves
Pewajah Isi	:	Tim Setia Purna Inves
Pewajah Sampul	:	Tim Setia Purna Inves
Pereka Ilustrasi	:	Tim Setia Purna Inves
Ukuran Buku	:	17,6 × 25 cm

510.71
DJU
m

DJUMANTA, Wahyudin
Mahir Mengembangkan Kemampuan Matematika 2 : untuk Kelas XI Sekolah Menengah Atas / Madrasah Aliyah / Wahyudin Djumanta; R. Sudrajat; editor Tim Setia Purna Inves, -- Jakarta: Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2008.
vi, 250 hlm.: tab., ilus., 25 cm

Bibliografi: hal. 245
Indeks.
ISBN 979-462-978-2
1. Matematika – Studi dan Pengajaran I. Mahir Mengembangkan Kemampuan Matematika
II. Sudrajat, R

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2008

Diperbanyak oleh ...

Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2008, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis/penerbit untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui situs internet (website) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 34 Tahun 2008.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis/penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departe¬men Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (down load), digandakan, dicetak, dialih¬mediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juli 2008

Kepala Pusat Perbukuan

Kata Pengantar

Matematika adalah ilmu dasar yang dapat digunakan sebagai alat bantu memecahkan masalah dalam berbagai bidang ilmu, seperti: Ekonomi, Akuntansi, Astronomi, Geografi, dan Antropologi. Oleh karena itu, matematika patut mendapat sebutan "*Mathematics is Queen and Servant of Science*" yang artinya Matematika adalah ratu dan pelayan ilmu pengetahuan.

Sesuai dengan misi penerbit untuk memberikan kontribusi yang nyata bagi kemajuan ilmu pengetahuan maka penulis dan penerbit merealisasikan tanggung jawab tersebut dengan menyediakan buku bahan ajar matematika yang berkualitas, sesuai dengan tuntutan kurikulum yang berlaku.

Buku ini disusun berdasarkan kurikulum yang berlaku dan disajikan secara sistematis, komunikatif, dan integratif, serta adanya keruntutan antar bab. Pada awal setiap bab, disajikan pula **Tes Kompetensi Awal** sebagai materi prasyarat untuk mempelajari bab yang bersangkutan.

Di akhir setiap bab, terdapat **Rangkuman** dan **Refleksi** yang bertujuan untuk lebih meningkatkan pemahaman siswa tentang materi yang telah siswa pelajari. Buku ini dilengkapi juga dengan beberapa materi dan soal pengayaan, yaitu **Informasi untuk Anda** (***Information for You***), **Tantangan untuk Anda**, **Hal Penting,Tugas** dan **Situs Matematika**.

Untuk menguji pemahaman siswa terhadap suatu konsep, pada setiap subbab diberikan **Tes Kompentensi Subbab** dan beberapa **Soal Terbuka**. Pada akhir setiap bab, juga diberikan **Tes Kompetensi Bab**. Pada akhir semester siswa diberikan **Tes Kompetensi Semester**. Di dalam buku ini juga dilengkapi dengan **Kunci Jawaban** soal terpilih sebagai sarana menguji pemahaman siswa atas materi yang telah dipelajari.

Kami mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu pembuatan buku ini.

Demikianlah persembahan kami untuk dunia pendidikan.

Bandung, Juli 2008

Penulis

Daftar Isi

Bab 1

Statistika

Setelah mempelajari bab ini, Anda harus mampu melakukan pengolahan, penyajian dan penafsiran data dengan cara membaca dan menyajikan data dalam bentuk tabel dan diagram batang, garis, lingkaran, dan *ogive* serta pemaknaannya, dan menghitung ukuran pemusatan, ukuran letak dan ukuran penyebaran data, serta menafsirkannya.

Banyak permasalahan sehari-hari yang dapat diselesaikan dengan konsep statistika, seperti permasalahan berikut.

Selama dua tahun berturut-turut, supermarket *A* mencatat keuntungan setiap bulannya (dalam jutaan rupiah) sebagai berikut.

43, 35, 57, 60, 51, 45, 60, 43, 48, 55, 57, 45, 43, 35, 48, 45, 55, 65, 51, 43, 55, 45, 65, 55.

Dalam jangka waktu yang sama, supermarket *B* mencatat keuntungan setiap bulannya (dalam jutaan rupiah) sebagai berikut.

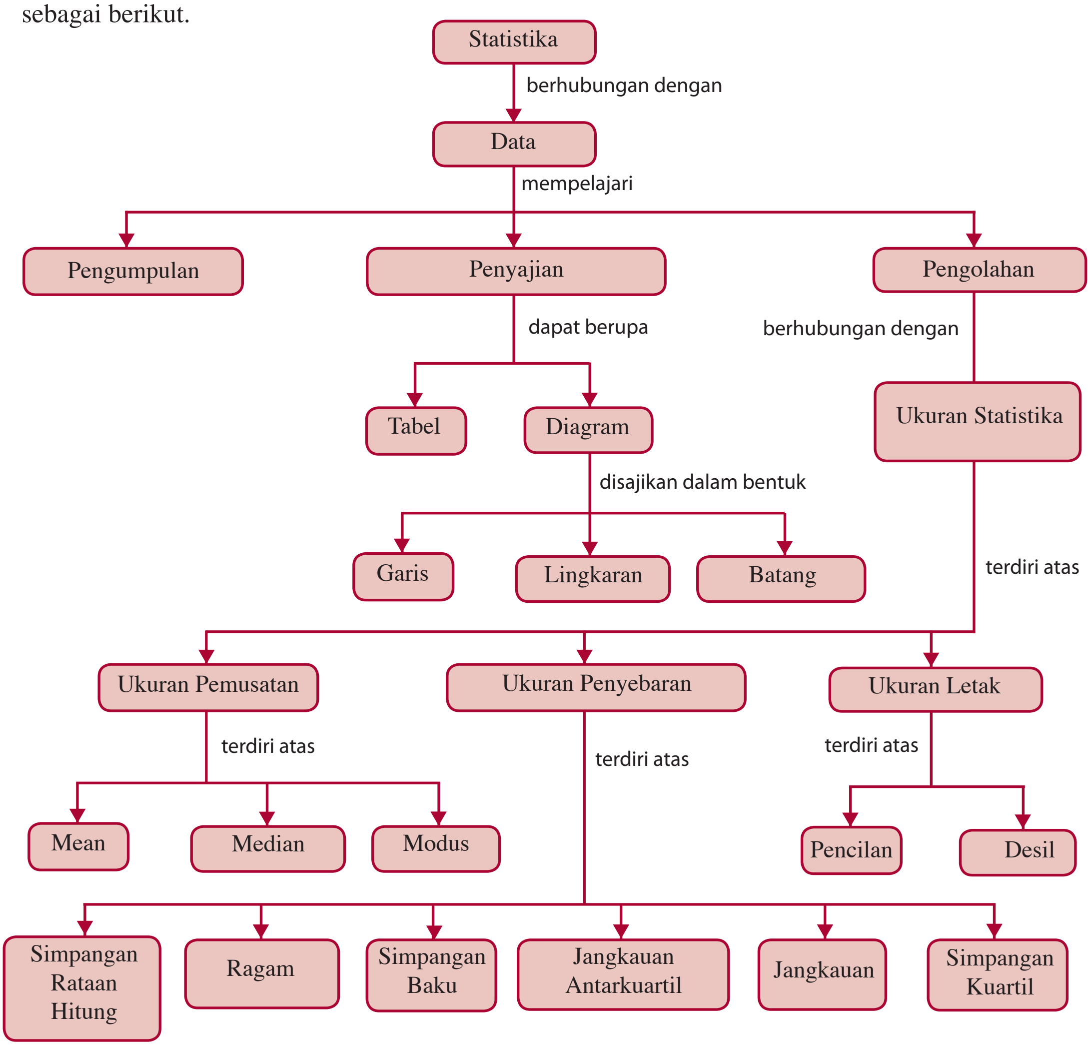
67, 78, 70, 83, 80, 56, 70, 81, 45, 50, 81, 56, 70, 55, 70, 61, 51, 75, 55, 83, 67, 54, 68, 54.

Pada Maret tahun berikutnya, pengusaha supermarket *A* memperoleh keuntungan 75 juta. Sedangkan supermarket *B* memperoleh keuntungan 84 juta. Pengusaha mana yang berhasil?

Untuk mengetahui jawabannya, Anda harus mempelajari bab ini dengan baik.

Diagram Alur

Untuk mempermudah Anda dalam mempelajari bab ini, pelajarilah diagram alur yang disajikan sebagai berikut.



Tes Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Jelaskan langkah-langkah yang Anda lakukan untuk membuat diagram garis.
2. Urutkan data berikut dari yang terkecil. Kemudian, urutkan lagi dari yang terbesar. Jelaskan pula cara mengurutkan data tersebut.

   78, 23, 45, 58, 41, 89, 45, 12, 12, 13, 54, 85, 74, 41, 41.
3. Tentukan mean, median, kuartil bawah, dan kuartil atas dari data berikut.
   - **a.** 8, 7, 7, 9, 8, 6, 7, 8, 9, 6, 7
   - **b.** 4, 3, 8, 5, 11, 9, 3, 16, 5, 15, 9, 11, 12, 9, 10, 8, 7, 5, 4, 8

A. Penyajian Data

Statistika berkaitan erat dengan data. Oleh karena itu, sebelum dijelaskan mengenai pengertian statistika, terlebih dahulu akan dijelaskan mengenai data.

1. Pengertian Datum dan Data

Di Kelas IX Anda telah mempelajari pengertian datum dan data. Agar tidak lupa pelajari uraian berikut.

Misalkan, hasil pengukuran berat badan 5 murid adalah 43 kg, 43 kg, 44 kg, 55 kg, dan 60 kg. Adapun tingkat kesehatan dari kelima murid itu adalah baik, baik, baik, buruk, dan buruk.

Data pengukuran berat badan, yaitu 43 kg, 43 kg, 44 kg, 55 kg, dan 60 kg disebut *fakta dalam bentuk angka*. Adapun hasil pemeriksaan kesehatan, yaitu baik dan buruk disebut *fakta dalam bentuk kategori*. Selanjutnya, fakta tunggal dinamakan *datum*. Adapun kumpulan datum dinamakan *data*.

2. Pengertian Populasi dan Sampel

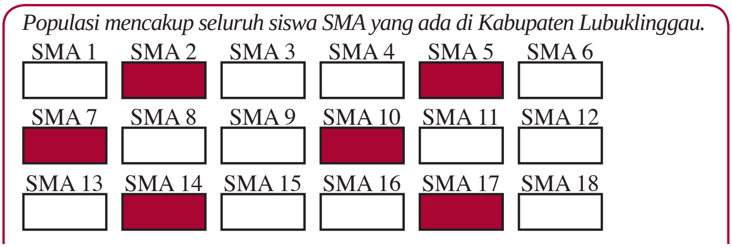
Misal, seorang peneliti ingin meneliti tinggi badan rata-rata siswa SMA di Kabupaten Lubuklinggau. Kemudian, ia kumpulkan data tentang tinggi badan seluruh siswa SMA di Kabupaten Lubuklinggau. Data tinggi badan seluruh siswa SMA di Kabupaten Lubuklinggau disebut *populasi*.

Namun, karena ada beberapa kendala seperti keterbatasan waktu, dan biaya, maka data tinggi badan seluruh siswa SMA di Kabupaten Lubuklinggau akan sulit diperoleh. Untuk mengatasinya, dilakukan pengambilan tinggi badan dari beberapa siswa SMA di Kabupaten Lubuklinggau yang *dapat mewakili* keseluruhan siswa SMA di Kabupaten Lubuklinggau.

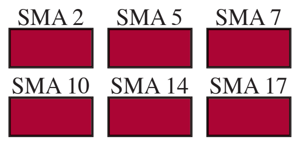
Data tersebut dinamakan *data dengan nilai perkiraan*, sedangkan sebagian siswa SMA yang dijadikan objek penelitian disebut *sampel*. Agar diperoleh hasil yang berlaku secara umum maka dalam pengambilan sampel, diusahakan agar sampel dapat mewakili populasi.

Berikut ini skema pengambilan sampel dari populasi.

Populasi mencakup seluruh siswa SMA yang ada di Kabupaten Lubuklinggau.



Sampel dapat diambil dari beberapa siswa SMA yang ada di Kabupaten Lubuklinggau yang mewakili.



3. Pengumpulan Data

Menurut sifatnya, data dibagi menjadi 2 golongan, yaitu sebagai berikut.

1) Data kuantitatif adalah data yang berbentuk angka atau bilangan. Data kuantitatif terbagi atas dua bagian, yaitu data cacahan dan data ukuran.
   a) Data cacahan (data diskrit) adalah data yang diperoleh dengan cara membilang. Misalnya, data tentang banyak anak dalam keluarga.
   b) Data ukuran (data kontinu) adalah data yang diperoleh dengan cara mengukur. Misalnya, data tentang ukuran tinggi badan murid.
2) Data kualitatif adalah data yang bukan berbentuk bilangan. Data kualitatif berupa ciri, sifat, atau gambaran dari kualitas objek. Data seperti ini disebut *atribut*. Sebagai contoh, data mengenai kualitas pelayanan, yaitu baik, sedang, dan kurang.

Cara untuk mengumpulkan data, antara lain adalah melakukan wawancara, mengisi lembar pertanyaan (*questionery*), melakukan pengamatan (*observasi*), atau menggunakan data yang sudah ada, misalnya rataan hitung nilai rapor.

Ingatlah

Kerapkali data yang Anda peroleh merupakan bilangan desimal. Agar perhitungan mudah dilakukan, bilangan tersebut dibulatkan. Adapun aturan pembulatan sebagai berikut.

1) Jika angka yang dibulatkan lebih dari atau sama dengan 5, pembulatan dilakukan dengan menambah 1 angka di depannya.
2) Jika angka yang akan dibulatkan kurang dari 5, angka tersebut dianggap tidak ada atau nol.

Sekarang, coba cari di buku petunjuk penggunaan atau tanya ke kakak kelas cara membulatkan bilangan dengan menggunakan kalkulator ilmiah.

4. Datum Terkecil, Datum Terbesar, Kuartil Bawah, Median, dan Kuartil Atas

Data berikut adalah tinggi badan 12 anak (dalam cm).

164	166	170	167	171	172
162	164	168	165	163	160

Dari data tersebut Anda dapat mengetahui hal-hal berikut.

a) Anak yang paling pendek tingginya 160 cm.
b) 50% dari kedua belas anak itu tingginya tidak lebih dari 165,5 cm.
c) 25% dari kedua belas anak itu tingginya lebih dari 169 cm.

Untuk mengetahui hal-hal tersebut diperlukan *statistik lima serangkai*, yaitu data statistik x_1, Q_1, Q_2, Q_3, dan x_n dengan x_1 *datum terkecil*, Q_1= *kuartil bawah*, Q_2 = *median*, Q_3 = *kuartil atas*, dan x_n *datum terbesar* (x_1 dan x_n dapat diketahui).

Untuk menentukan datum terkecil dan datum terbesar Anda perlu menyusun data tersebut dalam suatu urutan berdasarkan nilainya, yaitu sebagai berikut.

160	162	163	164	164	165
166	167	168	170	171	172

Amati bahwa setelah data diurutkan Anda dapat menemukan datum terkecil dan datum terbesar dengan mudah, yaitu datum terkecil = 160 cm dan datum terbesar = 172 cm.

Jika data yang telah diurutkan itu dibagi menjadi 2 bagian yang sama, diperoleh urutan berikut:

$$\underbrace{160\ 162\ 163\ 164\ 164\ 165 \ \vdots\ 166\ 167\ 168\ 170\ 171\ 172}_{}$$

160 162 163 164 164 165 ⋮ 166 167 168 170 171 172

Q_2

Tampak bahwa median membagi data ini menjadi dua bagian yang sama, yaitu enam datum kurang dari median dan enam datum lebih dari median. Median untuk data tersebut adalah $Q_2 = \dfrac{165+166}{2}$ = 165,5. Dengan demikian, Anda dapat mengatakan bahwa 50% dari data itu tingginya tidak lebih dari 165,5 cm. Bagaimana menentukan median jika banyak data ganjil?

Dari uraian tersebut, dapatkah Anda menduga rumus menentukan median? Cobalah nyatakan rumus tersebut dengan kata-kata Anda sendiri. Konsep yang telah Anda pelajari tersebut merupakan hal khusus dari hal umum berikut.

Misalkan diketahui data terurut
$x_1, x_2, x_3, ..., x_n$
dengan n = banyak datum.

1) **Untuk n genap maka mediannya adalah** $Q_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)$

2) **Untuk n ganjil maka mediannya adalah** $Q_2 = x_{\frac{n+1}{2}}$

Jika data yang telah diurutkan dibagi menjadi 4 bagian yang sama, diperoleh

160 162 163 ⋮ 164 164 165 ⋮ 166 167 168 ⋮ 170 171 172

Q_1 Q_2 Q_3

Tampak bahwa *kuartil* membagi data menjadi empat bagian yang sama, yaitu tiga datum kurang dari *kuartil bawah* (Q_1), tiga datum antara Q_1 dan Q_2, tiga datum antara Q_2 dan *kuartil atas* (Q_3), dan tiga datum lebih dari Q_3. Kuartil bawah dan kuartil atas dapat ditentukan, yaitu

$$Q_1 = \frac{163+164}{2} = 163{,}5 \text{ dan } Q_3 = \frac{168+170}{2} = 169.$$

Dengan demikian, Anda dapat mengatakan bahwa 25% dari kedua belas anak itu tingginya lebih dari 169 cm.

Dari uraian tersebut, dapatkah Anda menemukan langkah-langkah cara menentukan kuartil? Cobalah tentukan langkah-langkahnya dengan menggunakan kata-kata Anda sendiri.

Berikut ini adalah langkah-langkah menentukan kuartil.

Ingatlah

Statistik lima serangkai, yaitu
- datum terkecil x_1
- kuartil bawah Q_1
- median Q_2
- kuartil atas Q_3
- datum terbesar x_n

1. **Data diurutkan dari datum terkecil ke datum terbesar.** $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$.
2. **Tentukan *kuartil kedua* atau median (Q_2) dengan membagi data menjadi dua bagian sama banyak.**
3. **Tentukan *kuartil bawah* (Q_1) dengan membagi data di bawah Q_2 menjadi dua bagian sama banyak.**
4. **Tentukan *kuartil atas* (Q_3) dengan membagi data di atas Q_2 menjadi dua bagian sama banyak.**

Contoh 1.1

Tentukan datum terkecil, datum terbesar, median, kuartil bawah, dan kuartil atas dari data berikut:

a. 8, 7, 9, 4, 6, 5, 4

b. 9, 8, 7, 9, 4, 6, 5, 4

Jawab:

a. Banyak data (n) sama dengan 7. Jika data ini diurutkan dari yang terkecil, diperoleh

No. Urut Data	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
Nilai Data	4	4	5	6	7	8	9

- Datum terkecil adalah $x_1 = 4$.
- Datum terbesar adalah $x_7 = 9$.
- Median merupakan datum tengah setelah data diurutkan.

Jadi, median (Q_2) = x_4 = 6. Jika menggunakan rumus

$$Q_2 = x_{\frac{n+1}{2}}$$
$$= x_{\frac{n+1}{2}} = x_4$$
$$= 6$$

- Kuartil bawah (Q_1)
  Q_1 = median dari 4 4 5
  Jadi, Q_1 = 4 (nilai paling tengah)
- Kuartil atas (Q_3)
  Q_3 = median dari 7 8 9
  Jadi, Q_2 = 8 (nilai paling tengah)

b. Banyak datum (n) sama dengan 8. Jika data diurutkan, diperoleh

No. Urut Data	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
Nilai Data	4	4	5	6	7	8	9	9

- Datum terkecil adalah $x_1 = 4$.
- Datum terbesar adalah $x_8 = 9$.

Median tidak dapat ditentukan dengan cara seperti soal (a). Median untuk data genap (n = 8) ditentukan dengan menggunakan rumus sebagai berikut.

$$Q_2 = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n+1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_{\frac{8}{2}} + x_{\frac{8+1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x_4 + x_5) = \frac{1}{2}(6+7) = 6{,}5$$

Dengan cara yang sama, coba Anda tentukan Q_1 dan Q_2. Jika Anda menyelesaikannya dengan benar, diperoleh Q_1 = 4,5 dan Q_3 = 8,5.

Pembahasan Soal

Hasil dari suatu pengamatan adalah sebagai berikut.
12 11 9 8 9 10 9 12
Median dari pengamatan tersebut adalah ....

Jawab:
Data diurutkan dari yang terkecil.
8 9 9 9 10 11 12 12

Mediannya adalah $\frac{9+10}{2} = 9{,}5$

Soal PPI 1982

5. Jangkauan Data, Jangkauan Antarkuartil, dan Simpangan Kuartil

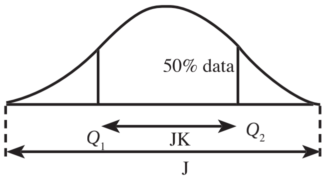
a. Jangkauan Data

Jangkauan data atau disebut juga *rentang data* adalah selisih antara datum terbesar dan datum terkecil. Jika jangkauan data dinotasikan J, datum terbesar x_n, dan datum terkecil x_1 maka

$$\boxed{J = x_n - x_1}$$

Jangkauan antarkuartil atau disebut juga *rentang interkuartil* adalah selisih kuartil atas (Q_3) dan kuartil bawah (Q_1). Jika jangkauan antarkuartil dinotasikan JK maka

$$\boxed{JK = Q_3 - Q_1}$$



Gambar 1.1

Perbedaan antara jangkauan data dan jangkauan antarkuartil diperlihatkan pada Gambar 1.1. Dari gambar tersebut tampak bahwa jangkauan antarkuartil merupakan ukuran penyebaran data yang lebih baik daripada rentang sebab *JK* mengukur rentang dari 50% data yang di tengah.

Selain jangkauan dan jangkauan antarkuartil, dikenal pula *simpangan kuartil* atau *rentang semi-interkuartil*. Simpangan kuartil (*SK*) adalah setengah dari jangkauan antarkuartil (*JK*).

$$\boxed{SK = \frac{1}{2} JK = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)}$$

Contoh 1.2

Seorang peneliti mengambil masing-masing 1 kg air dari 20 sungai yang berbeda untuk diuji kadar garamnya. Hasil pengujian (dalam mg) adalah

193	282	243	243	282	214	185	128	243	159
218	161	112	131	201	132	194	221	141	136

Dari data tersebut tentukan:

a. jangkauan data;
b. jangkauan antarkuartil;
c. simpangan kuartil.

Jawab:

Data diurutkan hasilnya sebagai berikut:

No. Urut Data	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
Datum	112	128	131	132	136	141	159	161	185	193

No. Urut Data	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}
Datum	194	201	214	218	221	243	243	243	282	282

- Datum terkecil (x_1) adalah 112.
- Datum terbesar (x_n) adalah 282.
- Median (Q_2) = $\frac{1}{2}(x_{10} + x_{11}) = (193 + 194) = 193{,}5$.
- Kuartil bawah (Q_1)
  = median dari

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
112	128	131	132	136	141	159	161	185	193

$$= \frac{1}{2}(x_5 + x_6) = \frac{1}{2}(136 + 141) = 138{,}5.$$

- Kuartil atas (Q_3)
  = median dari

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}
194	201	214	218	221	243	243	243	282	282

$= \frac{1}{2}(x_{15} + x_{16}) = \frac{1}{2}(221 + 243) = 232$

a. Jangkauan data (J)
$J = x_n - x_1 = 282 - 112 = 170$

b. Jangkauan antarkuartil (JK)
$JK = Q_3 - Q_1 = 232 - 138{,}5 = 93{,}5$

c. $SK = \frac{1}{2}\ JK = \frac{1}{2}(93{,}5) = 46{,}75.$

b. Pencilan (*Outlier*)

Nilai statistik jangkauan (J) dan jangkauan antarkuartil (JK) dapat digunakan untuk memperoleh gambaran tentang penyebaran data dengan cepat. Untuk keperluan tersebut didefinisikan *satu langkah* sebagai berikut.

Definisi 1.1

Satu langkah (L) adalah satu setengah kali panjang jangkauan antarkuartil (JK). Secara matematis, ditulis $L = 1\frac{1}{2}\ JK$.

Nilai yang letaknya satu langkah di bawah Q_1 dinamakan *pagar dalam* (PD). Adapun nilai yang letaknya satu langkah di atas Q_3 dinamakan *pagar luar* (PL)

$$\boxed{PD = Q_1 - L \quad \text{dan} \quad PL = Q_3 + L}$$

Semua data yang nilainya kurang dari pagar dalam atau lebih dari pagar luar disebut *pencilan*. Pencilan adalah datum yang memiliki karakteristik berbeda dari datum lainnya. Dapat dikatakan bahwa pencilan merupakan datum yang tidak konsisten dalam kumpulan data.

Contoh 1.3

Hasil tes matematika dari 20 siswa tercatat sebagai berikut.
70, 68, 71, 68, 66, 73, 65, 74, 65, 64, 78, 79, 61, 81, 60, 97, 44, 64, 83, 56.
Jika ada data pencilan, tentukan datum tersebut.

Jawab:

Data setelah diurutkan menjadi

$$44, 56, 60, 61, \underset{\underset{Q_1}{\uparrow}}{64, 64}, 65, 65, 66, \underset{\underset{Q_2}{\uparrow}}{68, 68}, 70, 71, 73, \underset{\underset{Q_3}{\uparrow}}{74, 78}, 79, 81, 83, 97$$

- $Q_1 = \dfrac{64 + 64}{2} = 64$
- $Q_2 = \dfrac{68 + 68}{2} = 68$
- $Q_3 = \dfrac{74 + 78}{2} = 76$
- $JK = Q_3 - Q_1 = 76 - 64 = 12$
- $L = 1\frac{1}{2}\, JK = 1\frac{1}{2} \,.\, 12 = 18$

$PD = Q_1 - L = 64 - 18 = 46$

$PL = Q_3 + L = 76 + 18 = 94$

Dengan demikian, ada dua pencilan dalam data ini, yaitu 44 dan 97.

Tes Kompetensi Subbab A

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Ali ingin membeli sebotol minyak wangi. Sebelum transaksi dilakukan, ia meneteskan dua tetes minyak wangi itu pada pakaiannya untuk mengetes keharumannya. Tentukan populasi dan sampelnya.
2. Menurut BPS, banyak sekolah di setiap provinsi di Indonesia pada tahun 2004/2005 tercatat sebagai berikut.

   48, 476, 91, 43, 39, 119, 33, 139, 493, 398, 547, 128, 708, 61, 25, 55, 16, 55, 30, 34, 56, 51, 39, 134, 21, 26, 24.

   Dari data itu, tentukan

   a. datum terkecil dan datum terbesar;

   b. kuartil bawah, median, dan kuartil atas;

   c. jangkauan data jangkauan antarkuartil, dan simpangan kuartil;

   d. apakah ada data *outlier*? Jika ada, tentukan data tersebut.
3. Jelaskan apa yang dimaksud dengan data kualitatif dan data kuantitatif.
4. Data ulangan nilai matematika siswa kelas XI B sebagai berikut.

   75, 55, 52, 50, 78, 80, 85, 86, 80, 55, 75, 80, 48.

   Selain data tersebut, masih terdapat tujuh data lagi yang belum tercatat akibat datanya terhapus. Akan tetapi, berdasarkan catatan kecil yang sempat terbaca, diketahui bahwa median data setelah ditambah data yang hilang adalah 70,5, dan kuartil bawah data yang hilang adalah 60. Tentukan tujuh data yang hilang itu jika pada tujuh data yang hilang terdapat tiga kelompok data yang setiap kelompok bernilai sama.
5. Jelaskan dengan kata-kata Anda sendiri, cara mengecek apakah dalam data ada pencilan atau tidak.

B. Penyajian Data Statistik

Ada dua cara penyajian data yang sering dilakukan, yaitu
a) daftar atau tabel,
b) grafik atau diagram.

1. Penyajian Data dalam Bentuk Tabel

Misalkan, hasil ulangan Bahasa Indonesia 37 siswa kelas XI SMA 3 disajikan dalam tabel di samping.

Tabel 1.1

Nilai	Frekuensi
2	7
4	3
5	5
6	4
7	10
9	7
10	1
Jumlah	37

Penyajian data pada Tabel 1.1 dinamakan *penyajian data sederhana*. Dari tabel 1.1, Anda dapat menentukan banyak siswa yang mendapat nilai 9, yaitu sebanyak 7 orang. Berapa orang siswa yang mendapat nilai 5? Nilai berapakah yang paling banyak diperoleh siswa?

Jika data hasil ulangan bahasa Indonesia itu disajikan dengan cara mengelompokkan data nilai siswa, diperoleh tabel frekuensi berkelompok seperti pada Tabel 1.2. Tabel 1.2 dinamakan *Tabel Distribusi Frekuensi*.

Tabel 1.2. Tabel Distribusi Frekuensi

Interval Kelas	Turus	Frekuensi
1–2	𝍸 II	7
3–4	III	3
5–6	𝍸 III	8
7–8	𝍸 𝍸	10
9–10	𝍸 III	8
	Jumlah	37

2. Penyajian Data dalam Bentuk Diagram

Kerapkali data yang disajikan dalam bentuk tabel sulit untuk dipahami. Lain halnya jika data tersebut disajikan dalam bentuk diagram maka Anda akan dapat lebih cepat memahami data itu. Diagram adalah gambar yang menyajikan data secara visual yang biasanya berasal dari tabel yang telah dibuat. Meskipun demikian, diagram masih memiliki kelemahan, yaitu pada umumnya diagram tidak dapat memberikan gambaran yang lebih detail.

a. Diagram Batang

Diagram batang biasanya digunakan untuk menggambarkan data diskrit (data cacahan). Diagram batang adalah bentuk penyajian data statistik dalam bentuk batang yang dicatat dalam interval tertentu pada bidang cartesius.

Ada dua jenis diagram batang, yaitu
1) diagram batang vertikal, dan
2) diagram batang horizontal.

Contoh 1.4

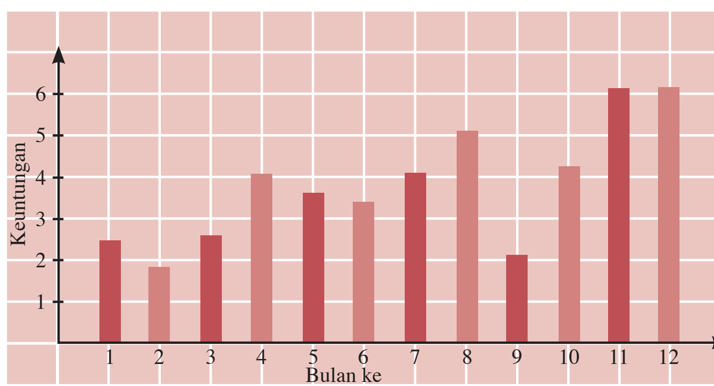
Selama 1 tahun, toko "Anggo" mencatat keuntungan setiap bulan sebagai berikut.

Tabel 1.3
Keuntungan Toko "Anggo" per Bulan (dalam jutaan rupiah)

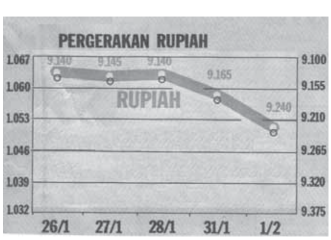
Bulan ke	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Keuntungan	2,5	1,8	2,6	4,2	3,5	3,3	4,0	5,0	2,0	4,2	6,2	6,2

a. Buatlah diagram batang vertikal dari data tersebut.
b. Berapakah keuntungan terbesar yang diperoleh Toko "Anggo" selama 1 tahun?
c. Kapan Toko "Anggo" memperoleh keuntungan yang sama selama dua bulan berturut-turut?

Jawab:
a. Diagram batang vertikal dari data tersebut, tampak pada gambar berikut.



b. Dari diagram tersebut tampak bahwa keuntungan terbesar yang diperoleh Toko "Anggo" selama 1 tahun adalah sebesar Rp6.200.000,00.
c. Toko "Anggo" memperoleh keuntungan yang sama selama dua bulan beturut-turut pada bulan ke-11 dan ke-12.



Sumber: *Koran Tempo*, 2005

Gambar 1.2
Grafik nilai tukar dolar terhadap rupiah pada 26 Januari 2005 sampai dengan 1 Februari 2005.

b. Diagram Garis

Pernahkah Anda melihat grafik nilai tukar dolar terhadap rupiah atau pergerakan saham di TV? Grafik yang seperti itu disebut *diagram garis*. Diagram garis biasanya digunakan untuk menggambarkan data tentang keadaan yang *berkesinambungan* (sekumpulan data kontinu). Misalnya, jumlah penduduk setiap tahun, perkembangan berat badan bayi setiap bulan, dan suhu badan pasien setiap jam.

Seperti halnya diagram batang, diagram garis pun memerlukan sistem sumbu datar (horizontal) dan sumbu tegak (vertikal) yang saling berpotongan tegak lurus. Sumbu mendatar biasanya menyatakan jenis data, misalnya waktu dan berat. Adapun sumbu tegaknya menyatakan frekuensi data.

Langkah-langkah yang dilakukan untuk membuat diagram garis adalah sebagai berikut.

1) Buatlah suatu koordinat (berbentuk bilangan) dengan sumbu mendatar menunjukkan waktu dan sumbu tegak menunjukkan data pengamatan.
2) Gambarlah titik koordinat yang menunjukkan data pengamatan pada waktu t.
3) Secara berurutan sesuai dengan waktu, hubungkan titik-titik koordinat tersebut dengan garis lurus.

Contoh 1.5

Berikut ini adalah tabel berat badan seorang bayi yang dipantau sejak lahir sampai berusia 9 bulan.

Usia (bulan)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Berat Badan (kg)	3,5	4	5,2	6,4	6,8	7,5	7,5	8	8,8	8,6

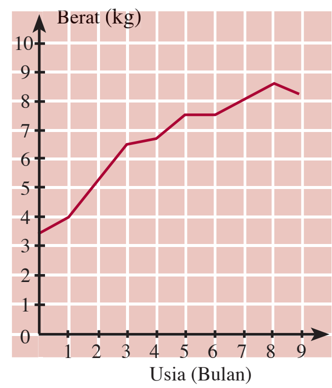
a. Buatlah diagram garisnya.
b. Pada usia berapa bulan berat badannya menurun?
c. Pada usia berapa bulan berat badannya tetap?

Jawab:

a. *Langkah ke-1*
Buatlah sumbu mendatar yang menunjukkan usia anak (dalam bulan) dan sumbu tegak yang menunjukkan berat badan anak (dalam kg).
Langkah ke-2
Gambarlah titik koordinat yang menunjukkan data pengamatan pada waktu t bulan.
Langkah ke-3
Secara berurutan sesuai dengan waktu, hubungkan titik-titik koordinat tersebut dengan garis lurus.
Dari ketiga langkah tersebut, diperoleh diagram garis dari data tersebut tampak pada Gambar 1.3.

b. Dari diagram tersebut dapat dilihat bahwa berat badan bayi menurun pada usai 8 sampai 9 bulan.

c. Berat badan bayi tetap pada usia 5 sampai 6 bulan. Darimana Anda memperoleh hasil ini? Jelaskan.



Gambar 1.3
Berat badan bayi sejak usia 0 bulan–9 bulan

Sumber: *Dokumentasi Penerbit*

Gambar 1.4
Keadaan gizi bayi dapat dipantau dari kartu KMS.

Tugas

1. Bersama tiga orang teman, catatlah nilai tukar dolar terhadap rupiah selama seminggu. Kemudian, buatlah diagram garis serta analisisnya. Dari diagram garis tersebut, dapatkah Anda memprediksi nilai tukar untuk hari berikutnya? Hasilnya laporkan dan bacakan di depan kelas.
2. Buatlah kelompok yang terdiri atas 5 orang. Cari informasi ke posyandu atau dokter spesialis anak, bagaimana cara membaca KMS (kartu menuju sehat). KMS dijadikan acuan untuk memantau apakah gizi seorang balita baik atau tidak. Kamu pun dapat mencari informasi tersebut di buku atau majalah. Tulis dan kumpulkan. Beberapa perwakilan kelompok membacakan hasilnya di depan kelas.

Observasi: Interpolasi dan Ekstrapolasi Data

Anda dapat melakukan observasi terhadap kecenderungan data yang disajikan pada suatu diagram garis. Dari observasi ini, Anda dapat membuat perkiraan-perkiraan dengan cara interpolasi dan ekstrapolasi. Hal ini ditempuh dengan mengganti garis patah pada diagram garis menjadi garis lurus.

Interpolasi data adalah menaksir data atau memperkirakan data di antara dua keadaan (misalnya waktu) yang berurutan. Misalkan, dari gambar grafik Contoh 1.7 dapat diperkirakan berat badan bayi pada usia 5,5 bulan. Coba Anda amati grafik tersebut, kemudian tentukan berat badan bayi pada usia 5,5 bulan.

Ekstrapolasi data adalah menaksir atau memperkirakan data untuk keadaan (waktu) mendatang. Cara yang dapat dilakukan untuk ekstrapolasi adalah dengan memperpanjang ruas garis terujung ke arah kanan. Misalkan, dari gambar grafik Contoh 1.7 dapat diperkirakan berat badan bayi pada usia 10 bulan. Jika garis lurus sudah ditentukan, Anda dapat menentukan interpolasi data. Untuk ekstrapolasi data, Anda harus berhati-hati. Menurut diagram garis, berapa kira-kira berat badan bayi pada usia 10 bulan? Berikan alasan Anda.

c. Diagram Lingkaran

Untuk mengetahui perbandingan suatu data terhadap keseluruhan, suatu data lebih tepat disajikan dalam bentuk diagram lingkaran. Diagram lingkaran adalah bentuk penyajian data statistika dalam bentuk lingkaran yang dibagi menjadi beberapa juring lingkaran.

Langkah-langkah untuk membuat diagram lingkaran adalah sebagai berikut.

1. Buatlah sebuah lingkaran pada kertas.
2. Bagilah lingkaran tersebut menjadi beberapa juring lingkaran untuk menggambarkan kategori yang datanya telah diubah ke dalam derajat.

Agar lebih jelasnya, pelajarilah contoh berikut.

Contoh 1.6

Tabel berikut menunjukkan banyaknya siswa di suatu kabupaten menurut tingkat sekolah pada tahun 2007.

Tingkat Pendidikan	Banyaknya Siswa
SD	175
SMP	600
SMA	225

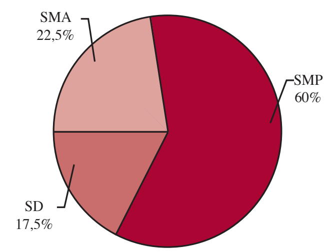
a. Buatlah diagram lingkaran untuk data tersebut.
b. Berapa persen siswa yang menyelesaikan sekolah sampai pada tingkat SMP?
c. Berapa persen siswa yang menyelesaikan sekolah sampai pada tingkat SMA?

Jawab:

a. Jumlah seluruh siswa adalah 1.000 orang. Seluruh siswa diklasifikasikan menjadi 5 katagori: SD = 175 orang, SMP = 600 orang, dan SMA = 225 orang.

- Siswa SD = $\frac{175}{1.000} \times 100\% = 17{,}5\%$
  Besar sudut sektor lingkaran = 17,5% × 360° = 63°
- Siswa SMP = $\frac{600}{1.000} \times 100\% = 60\%$
  Besar sudut sektor lingkaran = 60% × 360° = 216°
- Siswa SMA = $\frac{225}{1.000} \times 100\% = 22{,}5\%$
  Besar sudut sektor lingkaran = 22,5% × 360° = 81°

Diagram lingkaran ditunjukkan pada Gambar 1.5.



Gambar 1.5

b. Persentase siswa yang menyelesaikan sekolah sampai pada tingkat SMP adalah 60%.
c. Persentase siswa yang menyelesaikan sekolah sampai pada tingkat SMA adalah 22,5%.

3. Tabel Distribusi Frekuensi, Frekuensi Relatif dan Kumulatif, Histogram, Poligon Frekuensi, dan Ogive

a. Tabel Distribusi Frekuensi

Data yang berukuran besar ($n \geq 30$) lebih tepat disajikan dalam tabel distribusi frekuensi, yaitu cara penyajian data yang datanya disusun dalam kelas-kelas tertentu.

Langkah-langkah penyusunan tabel distribusi frekuensi adalah sebagai berikut.

- Langkah ke-2 menentukan banyak interval (K) dengan rumus "*Sturgess*" yaitu: $K = 1 + 3{,}3 \log n$ dengan n adalah banyak data.
  Banyak kelas harus merupakan bilangan bulat positif hasil pembulatan.
- Langkah ke-3 menentukan panjang interval kelas (I) dengan menggunakan rumus:

$$\boxed{I = \frac{J}{K}}$$

Ingatlah

Menentukan banyak kelas interval dengan aturan Sturges dimaksudkan agar interval tidak terlalu besar sebab hasilnya akan menyimpang dari keadaan sesungguhnya. Sebaiknya, jika interval terlalu kecil, hasilnya tidak menggambarkan keadaan yang diharapkan.

- Langkah ke-4 menentukan batas-batas kelas. Data terkecil harus merupakan batas bawah interval kelas pertama atau data terbesar adalah batas atas interval kelas terakhir.
- Langkah ke-5 memasukkan data ke dalam kelas-kelas yang sesuai dan menentukan nilai frekuensi setiap kelas dengan sistem turus.
- Menuliskan turus-turus dalam bilangan yang bersesuaian dengan banyak turus.

Contoh 1.7

Seorang peneliti mengadakan penelitian tentang berat badan dari 35 orang.
Data hasil penelitian itu (dalam kg) diberikan berikut ini:

48 32 46 27 43 46 25 41 40 58 16 36
21 42 47 55 60 58 46 44 63 66 28 56
50 21 56 55 25 74 43 37 51 53 39

Sajikan data tersebut ke dalam tabel distribusi frekuensi.

Jawab:

1. Jangkauan (J) = $X_m - X_n$ = 74 – 16 = 58.
2. Banyak kelas (K) = 1 + 3,3 log n = 1 + 3,3 log 35 = 6,095.
   Banyak kelas dibulatkan menjadi "6".
3. Panjang interval kelas (I) adalah $I = \frac{J}{K} = \frac{58}{6} = 9,67.$

   Panjang interval kelas dibulatkan menjadi "10". Dengan panjang interval kelas = 10 dan banyak kelas = 6, diperoleh tabel distribusi frekuensi seperti pada Tabel 1.6 atau Tabel 1.7

   Cara I: Batas bawah kelas pertama diambil datum terkecil. Amati Tabel 1.6. Dari tabel tersebut tampak bahwa frekuensi paling banyak dalam interval 46–55. Artinya, berat badan kebanyakan berkisar antara 46 kg dan 55 kg.

   Cara II: Batas atas kelas terakhir diambil datum terbesar. Amati Tabel 1.7.

   Dari tabel tampak frekuensi paling sedikit dalam interval 65–74. Artinya, berat badan antara 65 kg dan 74 kg ada 2 orang. Perhatikan interval kelas yang pertama, yaitu 15–24. 15 disebut batas bawah dan 24 disebut batas atas. Ukuran 15–24 adalah hasil pembulatan, ukuran yang sebenarnya terletak pada 14,5–24,5. 14,5 disebut tepi bawah kelas (batas bawah nyata) dan 24,5 disebut tepi atas kelas (batas atas nyata) pada interval kelas 15–24.

   Dalam menentukan tepi bawah kelas dan tepi atas kelas pada setiap interval kelas, harus diketahui satuan yang dipakai. Dengan demikian, untuk tepi bawah kelas adalah batas bawah kelas dikurangi $\frac{1}{2}$ satuan ukuran. Jadi, tepi kelas dari interval kelas 15–24 menjadi 14,5–24,5.

Tabel 1.6

Interval Kelas	Turus	Frekuensi
16–25	𝍸	5
26–35	III	3
36–45	𝍸 IIII	9
46–55	𝍸 𝍸	10
56–65	𝍸 I	6
66–75	II	2
		35

Tabel 1.7

Interval Kelas	Turus	Frekuensi
15–24	III	3
25–34	𝍸	5
35–44	𝍸 IIII	9
45–54	𝍸 III	8
55–64	𝍸 III	8
65–74	II	2
		35

b. Frekuensi Relatif dan Kumulatif

Frekuensi yang dimiliki setiap kelas pada tabel distribusi frekuensi bersifat mutlak. Adapun frekuensi relatif dari suatu data adalah dengan membandingkan frekuensi pada interval kelas itu dengan banyak data dinyatakan dalam persen. Contoh: interval frekuensi kelas adalah 20. Total data seluruh interval kelas = 80 maka frekuensi relatif kelas ini adalah $\frac{20}{80} = \frac{1}{4}$, sedangkan frekuensi relatifnya adalah $\frac{1}{4} \times 100\% = 25\%$.

Dari uraian tersebut, dapatkah Anda menyatakan rumus frekuensi relatif? Cobalah nyatakan rumus frekuensi relatif dengan kata-kata Anda sendiri.

Frekuensi relatif dirumuskan sebagai berikut.

$$\textbf{Frekuensi relatif kelas ke-}k = \frac{\textit{frekuensi kelas ke-}k}{\textit{banyak data}}$$

Frekuensi kumulatif kelas ke-k adalah jumlah frekuensi pada kelas yang dimaksud dengan frekuensi kelas-kelas sebelumnya.

Ada dua macam frekuensi kumulatif, yaitu
1) frekuensi kumulatif "kurang dari" ("kurang dari" diambil terhadap tepi atas kelas);
2) frekuensi kumulatif "lebih dari" ("lebih dari" diambil terhadap tepi bawah kelas).

$$\textbf{Tepi atas = batas atas} + \frac{1}{2}\ \textbf{satuan pengukuran}$$
$$\textbf{Tepi bawah = batas bawah} - \frac{1}{2}\ \textbf{satuan pengukuran}$$

Contoh 1.8

Dari Tabel 1.6 untuk interval kelas 46 – 55 (kelas 4), hitunglah
a. frekuensi relatif;
b. frekuensi kumulatif "kurang dari";
c. frekuensi kumulatif "lebih dari".

Jawab:
a. Frekuensi relatif kelas ke-4
$$= \frac{\text{frekuensi kelas ke-4}}{\text{banyak datum}} \times 100\% = \frac{10}{35} \times 100\% = 28,57\%$$
b. Frekuensi kumulatif "kurang dari" untuk interval kelas 46 – 55
= 5 + 3 + 9 + 10 = 27 (kurang dari tepi atas kelas 55,5)
c. Frekuensi kumulatif "lebih dari" untuk interval kelas 46 – 55
= 10 + 6 + 2 = 18 (lebih dari tepi bawah kelas 45,5).

Informasi untuk Anda

Informations for You

Kata histogram berasal dari bahasa Yunani, yaitu *histo* yang berarti kertas dan *gram* yang berarti menulis atau menggambar.

The root of "histogram" is from the Greek, histo which means tissue, gram which means write or draw.

Sumber:*www.DrMath.com*

c. Histogram dan Poligon Frekuensi

Histogram merupakan diagram frekuensi bertangga yang bentuknya seperti diagram batang. Batang yang berdekatan harus berimpit. Untuk pembuatan histogram, pada setiap interval kelas diperlukan tepi-tepi kelas. Tepi-tepi kelas ini digunakan unntuk menentukan titik tengah kelas yang dapat ditulis sebagai berikut.

$$\textbf{Titik tengah kelas} = \frac{1}{2}\ \textbf{(tepi atas kelas + tepi bawah kelas)}$$

Poligon frekuensi dapat dibuat dengan menghubungkan titik-titik tengah setiap puncak persegipanjang dari histogram secara berurutan. Agar poligon "tertutup" maka sebelum kelas paling bawah dan setelah kelas paling atas, masing-masing ditambah satu kelas.

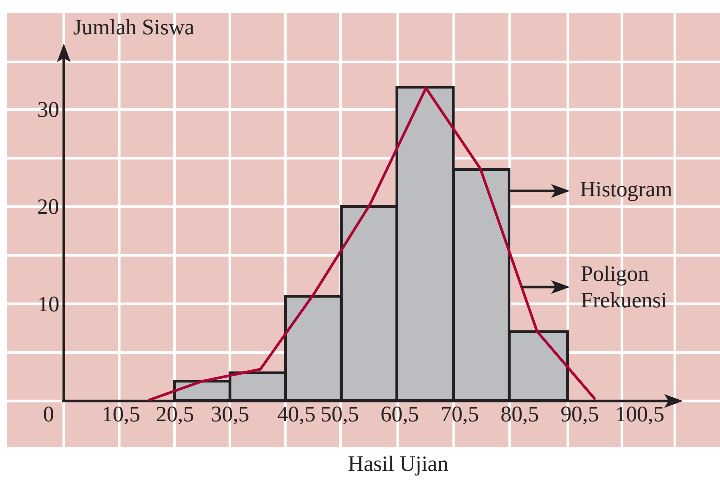
Contoh 1.9

Tabel 1.8

Kelas Interval	Frekuensi
21–30	2
31–40	3
41–50	11
51–60	20
61–70	33
71–80	24
81–90	7
	100

Tabel distribusi frekuensi hasil ujian matematika Kelas XI SMA Cendekia di Kalimantan Barat diberikan pada Tabel 1.8. Buatlah histogram dan poligon frekuensinya.

Jawab:



Dari histogram tersebut tampak bahwa kebanyakan siswa memperoleh nilai antara 60,5 dan 70,5. Coba Anda ceritakan hal lain dari histogram tersebut.

d. Ogive (Ogif)

Grafik yang menunjukkan frekuensi kumulatif kurang dari atau frekuensi kumulatif lebih dari dinamakan *poligon kumulatif*.

Untuk populasi yang besar, poligon mempunyai banyak ruas garis patah yang menyerupai kurva sehingga poligon frekuensi kumulatif dibuat mulus, yang hasilnya disebut *ogif*.

Ada dua macam *ogif*, yaitu sebagai berikut.

a. Ogif dari frekuensi kumulatif kurang dari disebut *ogif positif*.
b. Ogif dari frekuensi kumulatif lebih dari disebut *ogif negatif*.

Contoh 1.10

Tabel 1.9 dan 1.10 berturut-turut adalah tabel distribusi frekuensi kumulatif "kurang dari" dan "lebih dari" tentang nilai ulangan Biologi Kelas XI SMA 3.

a. Buatlah ogif positif dan ogif negatif dari tabel tersebut.
b. Berapakah jumlah siswa yang mempunyai nilai Biologi kurang dari 85?
c. Berapakah jumlah siswa yang mempunyai berat badan lebih dari 40?

Tabel 1.9

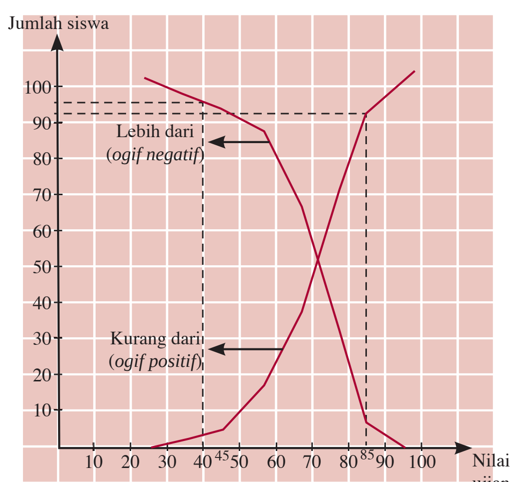
Nilai	Frekuensi
< 20,5	0
< 30,5	2
< 40,5	5
< 50,5	16
< 60,5	36
< 70,5	69
< 80,5	93
< 90,5	100

Tabel 1.10

Nilai	Frekuensi
> 20,5	100
> 30,5	98
> 40,5	95
> 50,5	84
> 60,5	64
> 70,5	31
> 80,5	7
> 90,5	0

Jawab:

a. Ogif positif dan ogif negatif dari tabel tersebut tampak pada gambar 1.6.



Gambar 1.6

b. Dari kurva ogif positif, tampak siswa yang mempunyai nilai kurang dari 85 adalah sebanyak 93 orang.
c. Dari kurva ogif negatif, tampak siswa yang mempunyai nilai lebih dari 40 adalah sebanyak 96 orang.

Tes Kompetensi Subbab B

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Buatlah daftar distribusi frekuensi dari data berikut.
79, 15, 90, 84, 48, 84, 76, 89, 78, 60, 43, 74, 62, 88, 72, 64, 54, 83, 71, 41, 67, 81, 98, 80, 25, 78, 75, 64, 10, 52, 76, 55, 85, 92, 65, 41, 95, 81, 77, 80, 23, 60, 79, 32, 57, 74, 52, 70, 82, 36.

2. Misalkan, berat badan seorang bayi yang dipantau sejak lahir sampai berusia 9 bulan, menunjukkan data sebagai berikut.

Umur (Bulan)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Berat (kg)	3,2	3,8	4,2	4,0	4,6	4,6	5,8	5,6	7,1	8,2

a. Buatlah diagram garis.
b. Pada usia berapa bulankah berat badannya menurun?
c. Pada usia berapa bulankah berat badannya tetap?

3. Data berikut adalah data tinggi badan dari 40 siswa SMA HEBAT, diukur sampai sentimeter terdekat.

168	165	176	159	163	175	158	170	170	155
156	169	170	160	160	164	153	154	150	158
147	151	150	167	168	160	150	148	161	174
176	163	149	166	175	158	166	164	167	159

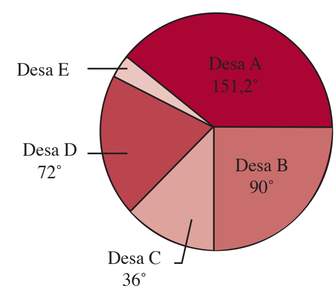
a. Buatlah tabel distribusi frekuensinya.
b. Buatlah histogram poligonnya.

4. Data berikut adalah berat badan dari 16 anak (dalam kg).

36	30	28	33	42	32	37	35
32	34	41	32	30	40	32	42

Buatlah diagram batang dari data tersebut. Tentukan pula kecenderungan penyebaran data.

5. Diagram berikut menunjukan data produksi padi di setiap desa di kecamatan Sukajaya



a. Tentukan persentase produksi padi yang dihasilkan desa E.
b. Jika produksi padi yang dihasilkan kecamatan Sukajaya 180 ton, tentukan produksi padi pada setiap desa.

C. Penyajian Data Ukuran menjadi Data Statistik Deskriptif

1. Rataan Hitung (Mean)

Masih ingatkah Anda cara menghitung rataan hitung? Misalnya, seorang guru mencatat hasil ulangan 10 orang siswanya, sebagai berikut.

6 5 5 7 7,5 8 6,5 5,5 6 9

Dari data tersebut, ia dapat menentukan nilai rataan hitung, yaitu

$$\frac{6+5+5+7+7,5+8+6,5+5,5+6+9}{10} = 6,55$$

Jadi, nilai rataan hitungnya adalah 6,55.

Secara umum, apabila nilai data kuantitatif tidak dikelompokkan dan dinyatakan oleh $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (terdapat n buah datum), nilai *rataan hitung* (*mean*) $\bar{x}$ ditentukan oleh rumus berikut.

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}} \quad \text{atau} \quad \boxed{\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}}$$

Perhitungan nilai rataan hitung akan menjadi lain jika guru tersebut mencatat hasil ulangan 40 orang siswanya sebagai berikut:

3 orang mendapat nilai 4
4 orang mendapat nilai 5
6 orang mendapat nilai 5,5
8 orang mendapat nilai 6
7 orang mendapat nilai 7
10 orang mendapat nilai 8
2 orang mendapat nilai 9

Nilai rataan hitung siswa dapat dicari sebagai berikut:

$$\frac{3(4)+4(5)+6(5,5)+8(6)+7(7)+10(8)+2(9)}{40} = \frac{260}{40} = 6,5$$

Jadi, nilai rataan hitungnya adalah 6,5.

Secara umum, apabila nilai-nilai data kuantitatif dinyatakan dengan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (terdapat n buah datum) dengan setiap nilai datum mempunyai frekuensi $f_1, f_2, \ldots, f_n$ maka rataan hitung ($\bar{x}$) ditentukan oleh rumus berikut.

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots f_n}} \quad \text{atau} \quad \boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

Contoh 1.11

1. Seorang peneliti mencatat banyak bayi yang lahir selama setahun di 20 kecamatan. Hasil pencatatannya disajikan berikut.
   136 140 220 193 130 158 242 127 184 213
   200 131 111 160 217 281 242 242 281 192
   a. Hitunglah rataan hitung (mean) data tersebut.
   b. Tentukan jangkauan datanya.
   c. Tentukanlah jangkauan antarkuartil.
2. Nilai rataan hitung (rata-rata) ujian matematika dari 38 orang siswa adalah 51. Jika nilai dari seorang siswa lain yang bernama Rahman digabungkan dengan kelompok itu maka nilai rataan hitung ujian matematika dari 39 orang siswa sekarang menjadi 52. Tentukanlah nilai yang diperoleh Rahman.

Ingatlah

$\bar{x}$ = rataan hitung dari suatu sampel

Sumber: *www.upload.wikimedia.org*

Gambar 1.8
Untuk data yang banyak, Anda dapat menggunakan kalkulator ilmiah untuk menghitung mean data.

Jawab:

1. **a**. Untuk menyelesaikan soal ini, dapat digunakan dua cara, yaitu tanpa menggunakan kalkulator dan dengan menggunakan kalkulator.
   - Tanpa kalkulator (dengan rumus):
     $$\bar{x} = \frac{136 + 140 + ... + 192}{20} = \frac{3.800}{20} = 190\,.$$
   - Dengan kalkulator (*fx*–3600 *Pv*), tahapan perhitungan sebagai berikut:
     1) kalkulator "ON"
     2) MODE 3 $\bar{x}$ program SD
     3) masukkan data
        136 data
        140 data
        ...
        ...
        ...
        192 data
     4) tekan tombol $\bar{x}$
        $\bar{x} = 190$

   Untuk kalkulator jenis lainnya, coba Anda cari informasi cara menghitung mean dengan kalkulator tersebut.

   b. Jangkauan datanya adalah: $J = x_n - x_1 = 281 - 111 = 170$.

   c. Setelah data diurutkan, diperoleh $Q_1 = 138$ dan $Q_3 = 231$. Jangkauan antarkuartil adalah $JK = Q_3 - Q_1 = 93$.

2. *Diketahui*:
   Nilai rataan hitung 38 siswa adalah 51. Nilai rataan hitung 39 siswa adalah 52.
   Ditanyakan:
   Nilai ujian matematika yang diperoleh Rahman.
   Pengerjaan:
   Misalkan,
   x_i = nilai ujian matematika dari siswa ke-*i* dengan $i = 1, 2, ..., 38$
   x_{39} = nilai ujian matematika yang diperoleh Rahman
   Dengan menggunakan rumus rataan hitung, berlaku:
   $$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_{38}}{38} = 51 \qquad .... (1)$$
   $$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_{39}}{39} = 52 \qquad .... (2)$$
   Substitusikan persamaan (1) ke persamaan (2) diperoleh
   $$\frac{51(38) + x_{39}}{39} = 52 \iff x_{39} = 52(39) - 51(38) = 90$$
   Jadi, nilai ujian matematika yang diperoleh Rahman adalah 90.

Pembahasan Soal

Jika 30 siswa kelas XI A_1 mempunyai nilai rata-rata 6,5; 25 siswa kelas XI A_2 mempunyai nilai rata-rata 7; dan 20 siswa kelas XI A_3 mempunyai nilai rata-rata 8, tentukan rata-rata nilai tujuh puluh lima siswa kelas XI tersebut.

Jawab:

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3}{n_1 + n_2 + n_3}$$
$$= \frac{30 \times 6,5 + 25 \times 7 + 20 \times 8}{75}$$
$$= \frac{530}{75} = 7,067 \approx 7,07$$

Soal UMPTN 1997

2. Menghitung Rataan Hitung dengan Menggunakan Rataan Hitung Sementara

Selain menggunakan rumus di Subbab C.1, rataan hitung dapat pula ditentukan dengan menggunakan rataan hitung sementara (x_s). Untuk kumpulan data berukuran besar, biasanya rataan hitung ditentukan dengan menggunakan rataan hitung sementara sebab apabila dihitung dengan rumus di Subbab C.1, perhitungannya akan rumit.

Langkah pertama dalam menentukan rataan hitung dengan menggunakan rataan hitung sementara adalah menentukan rataan sementara dari nilai tengah salah satu kelas interval. Kemudian, semua nilai tengah pada setiap kelas interval dikurangi rataan hitung sementara tersebut.

Setiap hasil pengurangan tersebut disebut simpangan terhadap rataan hitung sementara itu (d_i). Adapun rumus untuk mencari rataan hitung sementara adalah sebagai berikut.

$$\boxed{\bar{x} = \bar{x}_s + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}}$$

Dalam hal ini f_i = frekuensi kelas ke-i

$\bar{x}_s$ = rataan hitung sementara

d_i = simpangan dari titik tengah kelas ke-i dengan rataan hitung sementara.

Contoh 1.12

Tabel 1.11 menunjukkan hasil ulangan Fisika dari 71 siswa Kelas XI SMA Merdeka. Tentukanlah rataan hitung dengan menggunakan rataan hitung sementara.

Jawab:

Lengkapilah Tabel 1.11 dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Tentukan nilai tengah dari setiap kelas seperti berikut.

$$\frac{\text{batas bawah kelas + batas atas kelas}}{2}$$

2. Pilih nilai tengah dari suatu kelas sebagai rataan sementara. Misalnya, kita pilih rataan sementara adalah nilai tengah ke-6.

Jadi, $\bar{x}_s = \dfrac{65+69}{2} = 67$.

3. Untuk setiap kelas, tentukan simpangan nilai tengahnya terhadap $\bar{x}_s$, yaitu $d_i = x_i - \bar{x}_s$.

Pembahasan Soal

Perhatikan data berikut.

nilai ujian	3	4	5	6	7	8	9
frekuensi	3	5	12	17	14	6	3

Seorang siswa dinyatakan lulus jika nilai ujiannya lebih tinggi dari nilai rata-rata dikurangi 1. Dari data di atas, yang lulus adalah

Jawab:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

$$= \frac{9+20+60+102+98+48+27}{60}$$

$= 6{,}07$

Siswa dinyatakan lulus jika nilainya lebih dari
$6{,}07 - 1 = 5{,}07$.

Jadi, jumlah yang lulus adalah $= 17 + 14 + 6 + 3 = 40$ orang.

Soal Sipenmaru 1985

Tabel 1.11

Interval Kelas	Frekuensi
40 – 44	3
45 – 49	4
50 – 54	6
55 – 59	8
60 – 64	10
65 – 69	11
70 – 74	15
75 – 79	6
80 – 84	4
85 – 89	2
90 – 94	2

Hasilnya tampak pada tabel berikut.

Kelas Interval	f_i	Nilai Tengah (x_i)	d_i	$f_i\,d_i$
40–44	3	42	–25	–75
45–49	4	47	–20	–80
50–54	6	52	–15	–90
55–59	8	57	–10	–80
60–64	10	62	–5	–50
65–69	11	67	0	0
70–74	15	72	5	75
75–79	6	77	10	60
80–84	4	82	15	60
85–89	2	87	20	40
90–94	2	92	25	50
	$\sum f = 71$			$\sum f_i\,d_i = -90$

4. Tentukan hasil kali $f_i\,d_i$ dan $\sum f_i d_i$.
5. Hitung $\overline{x}$ dengan rumus $\overline{x} = \overline{x}_s \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

$$\overline{x} = \overline{x}_s + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 67 + \frac{-90}{71} = 65{,}73$$

3. Modus, Median, Kuartil, dan Desil

a. Modus (Mo)

Seorang guru ingin mengetahui nilai manakah yang paling banyak diperoleh siswanya dari data hasil ulangan matematika. Tentunya, ia akan menentukan datum yang paling sering muncul. Misalnya, data hasil ulangan 10 orang siswa sebagai berikut

7 4 6 5 7 8 5,5 7 6 7

Data yang paling sering muncul disebut *modus*. Modus dari data itu adalah 7 sebab nilai yang paling sering muncul adalah 7. Modus mungkin *tidak ada* atau jika ada modus tidak tunggal (lihat Contoh 1.16).

Jika data yang diperoleh berukuran besar, data perlu dikelompokkan agar penentuan modus mudah dilakukan. Modus dari data yang dikelompokkan dapat dicari dengan menggunakan rumus berikut.

$$\boldsymbol{Mo = L + i\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)}$$

dengan L = batas bawah nyata (tepi bawah) dari kelas modus

d_1 = selisih antara frekuensi dari kelas yang mengandung modus dan frekuensi dari kelas yang mendahuluinya (sebelumnya).

d_2 = selisih antara frekuensi dari kelas yang mengandung modus dan frekuensi dari kelas berikutnya

i = interval kelas/panjang kelas.

Telah Anda ketahui modus adalah datum yang paling sering muncul. Prinsip ini digunakan untuk menentukan kelas modus pada data yang dikelompokkan. Kelas modus adalah kelas yang frekuensinya paling banyak.

Contoh 1.13

1. Tentukan modus dari data berikut ini.
 a. 45, 50, 50, 64, 69, 70, 70, 70, 75, 80
 b. 50, 65, 65, 66, 68, 73, 73, 90
 c. 35, 42, 48, 50, 52, 55, 60

2. Tabel 1.2 menunjukkan hasil ulangan matematika dari 71 siswa Kelas XI SMA Bhinneka. Tentukan modus dari data tersebut.

Tabel 1.12

Interval Kelas	Frekuensi
40 – 44	2
45 – 49	2
50 – 54	6
55 – 59	8
60 – 64	10
65 – 69	11
70 – 74	15
75 – 79	6
80 – 84	4
85 – 89	4
90 – 94	3

Jawab:

1. **a.** Oleh karena nilai 70 muncul paling banyak (yaitu tiga kali muncul), modusnya adalah 70.
 b. Oleh karena nilai 65 dan 73 muncul paling banyak (yaitu dua kali muncul), modusnya adalah 65 dan 73 (tidak tunggal).
 c. Data 35, 42, 48, 50, 52, 55, 60 tidak mempunyai modus (mengapa?).

2. Oleh karena kelas ke-7 mempunyai frekuensi terbesar (frekuensinya 15) maka kelas ke-7 merupakan kelas modus.

i = 44,5 – 39,5 = 5

L = Batas bawah nyata kelas ke-7 = 69,5 (tepi bawah kelas)

d_1 = 15 – 11 = 4

d_2 = 15 – 6 = 9

Jadi, $Mo = L + i\left(\dfrac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$

$= 69{,}5 + (5)\left(\dfrac{4}{4+9}\right)$

$= 69{,}5 + 1{,}54 = 71{,}04$

Cobalah tentukan nilai modus tersebut dengan menggunakan kalkulator. Apakah hasilnya sama?

b. Median dan Kuartil

Dari data kuantitatif yang tidak dikelompokkan dan dinyatakan oleh $x_1, x_2, \ldots, x_n$, (dengan $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$) untuk n yang berukuran besar (yang dimaksud n berukuran besar yaitu $n \geq 30$) maka nilai ketiga kuartil, yaitu Q_1 (kuartil bawah), Q_2 (median), dan Q_3 (kuartil atas) ditentukan dengan rumus berikut.

- $Q_1 = x_{\frac{1}{4}(n+1)}$
- $Q_2 = x_{\frac{1}{2}(n+1)}$
- $Q_3 = x_{\frac{3}{4}(n+1)}$

Contoh 1.14

Tentukan median, kuartil bawah, dan kuartil atas dari data berikut.

67	86	77	92	75	70
63	79	89	72	83	74
75	103	81	95	72	63
66	78	88	87	85	67
72	96	78	93	82	71

Jawab:

Urutkan data dari kecil ke besar hasilnya sebagai berikut.

No. Urut Data (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nilai Data	63	63	66	67	67	70	71	72	72	72

No. Urut Data (x_i)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Nilai Data	74	75	75	77	78	78	79	81	82	83

No. Urut Data (x_i)	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Nilai Data	85	86	87	88	89	92	93	95	96	103

- Kuartil bawah (Q_1) $= x_{\frac{1}{4}(n+1)} = x_{\frac{1}{4}(30+1)} = x_{7\frac{3}{4}} = x_7 + \frac{3}{4}(x_8 - x_7)$

$$= 71 + \frac{3}{4}(72 - 71) = 71\frac{3}{4}$$

- Median (Q_2)$= x_{\frac{1}{2}(n+1)} = x_{\frac{1}{2}(30+1)} = x_{15\frac{1}{2}} = x_{15} + \frac{1}{2}(x_{24} - x_{15})$

$$= 78 + \frac{1}{2}(78 - 78) = 78$$

- Kuartil atas (Q_3) $= x_{\frac{3}{4}(n+1)} = x_{\frac{3}{4}(30+1)} = x_{23\frac{1}{4}} = x_{23} + \frac{1}{4}(x_{24} - x_{23})$

$$= 87 + \frac{1}{4}(88 - 87) = 87\frac{1}{4}$$

Untuk data yang dikelompokkan, nilai median (Me) dan kuartil (Q) ditentukan dengan rumus sebagai berikut.

- $$Q_1 = L_1 + i\left(\frac{\frac{1}{4}n - F_1}{f_1}\right)$$
- $$Q_2 = L_2 + i\left(\frac{\frac{1}{2}n - F_2}{f_2}\right)$$
- $$Q_3 = L_3 + i\left(\frac{\frac{3}{4}n - F_3}{f_3}\right)$$

dengan: L_i = batas bawah nyata dari kelas Q_i
F_i = jumlah frekuensi kelas-kelas sebelum kelas kuartil ke-i
f_i = frekuensi kelas kuartil ke-i
n = banyak data
i = panjang kelas/interval kelas

Ingatlah

1. Q_2 = median
2. i pada F_i dan f_i adalah sebagai indeks.
   i yang berdiri sendiri adalah sebagai panjang kelas.

Contoh 1.15

Tentukan median, kuartil bawah, dan kuartil atas dari data pada Tabel.1.12.

Tabel 1.12

Interval Kelas	Frekuensi
40 – 44	2
45 – 49	2
50 – 54	6
55 – 59	8
60 – 64	10
65 – 69	11
70 – 74	15
75 – 79	6
80 – 84	4
85 – 89	4
90 – 94	3

Jawab:

	Kelas Interval	Frekuensi	Frekuensi Kumulatif
	40 – 44	2	2
	45 – 49	2	4
	50 – 54	6	10
Q_1 →	55 – 59	8	18
	60 – 64	10	28
Q_2 →	65 – 69	11	39
Q_3 →	70 – 74	15	54
	75 – 79	6	60
	80 – 84	4	64
	85 – 89	4	68
	90 – 94	3	71

$Q_1 = x_{\frac{1}{4}(n+1)} = x_{\frac{1}{4}(71+1)} = x_{18}$.

Jadi, kelas Q_1 ada di kelas ke-4 (kelas 55 – 59)

$Q_2 = x_{\frac{1}{2}(n+1)} = x_{\frac{1}{2}(71+1)} = x_{36}$.

Jadi, kelas Q_2 ada di kelas ke-6 (kelas 65 – 69)

$$Q_3 = x_{\frac{3}{4}(n+1)} = x_{\frac{3}{4}(71+1)} = x_{54}\ .$$

Jadi, kelas Q_3 ada di kelas ke-7 (kelas 70 – 74)

Dengan demikian, Q_1, Q_2, Q_3 dapat ditentukan sebagai berikut.

$$Q_1 = L_1 + i\left(\frac{\frac{1}{4}n - F_1}{f_1}\right) = 54,5 + 5\left(\frac{\frac{1}{4}(71) - (2+2+6)}{8}\right)$$

$$= 54,5 + \frac{5}{8}(7,75) = 59,34$$

$$Q_2 = L_2 + i\left(\frac{\frac{1}{2}n - F_2}{f_2}\right) = 64,5 + 5\left(\frac{\frac{1}{2}(71) - (28)}{11}\right)$$

$$= 64,5 + \frac{7,5}{11}(5) = 64,5 + 3,4 = 67,9$$

$$Q_3 = L_3 + i\left(\frac{\frac{3}{4}n - F_3}{f_3}\right) = 69,5 + 5\left(\frac{\frac{3}{4}(71) - (39)}{15}\right)$$

$$= 69,5 + \frac{14,25}{15}(5) = 69,5 + 4,75 = 74,25$$

c. Desil

Untuk data sebanyak n dengan $n \geq 10$, Anda dapat membagi data tersebut menjadi 10 kelompok yang memuat data sama banyak. Ukuran statistik yang membagi data (setelah diurutkan dari terkecil) menjadi 10 kelompok sama banyak disebut *desil*. Sebelum data dibagi oleh desil, data harus diurutkan dari yang terkecil.

Oleh karena data dibagi menjadi 10 kelompok sama banyak maka didapat 9 desil. Amati pembagian berikut.

x_{min} D_1 D_2 D_3 D_4 D_5 D_6 D_7 D_8 D_9 x_{mak}

Terdapat 9 buah desil, yaitu desil pertama(D_1), desil kedua (D_2), ..., desil kesembilan (D_9).

Letak desil ditentukan dengan rumus berikut.

$$\textbf{Letak } (D_i) = \textbf{data ke-}\frac{i(n+1)}{10} \quad \textbf{atau } D_i = x_{\frac{i(n+1)}{10}}$$

Dalam hal ini $i = 1, 2, 3, ..., 9$ dan n = banyak data.

Tugas

Coba bersama kelompok belajar Anda selidiki, mengapa untuk menentukan desil, banyak data (n) harus lebih besar dari atau sama dengan 10 ($n \geq 10$). Tuliskan hasil penyelidikan, kemudian kumpulkan kepada guru Anda.

Contoh 1.16

Tentukan desil ke-1 dan desil ke-5 dari data berikut.
47, 33, 41, 37, 46, 43, 39, 36, 35, 42, 40, 39, 45

Jawab:

Data setelah diurutkan menjadi 33, 35, 36, 37, 39, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 46, 47.

Banyak data adalah n = 13.

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \text{data ke-}\frac{1(13+1)}{10}\\
&= \text{data ke–}1,4\\
&= x_1 + 0{,}4(x_2 - x_1)\\
&= 33 + 0{,}4\ (35–33)\\
&= 33 + 0{,}8\ =\ 33{,}8.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_5 &= \text{data ke-}\frac{5(13+1)}{10}\\
&= \text{data ke–}7\\
&= x_7 = 40.
\end{aligned}
$$

Jadi, desil ke -1 adalah 33,8 dan desil ke-5 adalah 40.

Ingatlah

1 + 1 + 5 + 7 dapat dilihat pada kolom frekuensi kumulatif (kelas 45 – 49)

Untuk data yang disusun dalam daftar distribusi frekuensi, nilai desil ditentukan sebagai berikut.

$$\boxed{D_i = (t_b)_{Di} + \left(\frac{\frac{i \times n}{10} - F_I}{f_I}\right)p}$$

Dalam hal ini i = 1, 2, 3, ..., 9

$(t_b)_{Di}$ = tepi bawah kelas D_i

F_i = frekuensi kumulatif sebelum kelas D_i

f_i = frekuensi kelas D_i

p = panjang kelas

Contoh 1.17

Tentukan nilai desil ketiga dari data pada Tabel 1.13.

Jawab:

Diketahui i = 3 maka $\frac{i \times n}{10} = \frac{3 \times 40}{10} = 12$.

Desil ketiga (D_3) terletak di kelas: 51–60 (karena kelas 51–60 memuat data ke-9, 10, 11, 12, 13).

$D_3 = 50{,}5 + \frac{12 - 8}{5}.10 = 50{,}5 + 8 = 58,\ 5.$

Tabel 1.13

Nilai	f_i	Frekuensi Kumulatif
31–40	5	5
41–50	3	8
51–60	5	13
61–70	6	19
71–80	9	28
81–90	8	36
91–100	4	40

4. Simpangan Rata-Rata, Ragam, dan Simpangan Baku

a. Simpangan Rata-Rata

Sekumpulan data kuantitatif yang tidak dikelompokkan dinyatakan oleh $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dari data tersebut dapat ditentukan simpangan rata-rata (S_R) dengan menggunakan rumus:

$$\boxed{S_R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}$$

Contoh 1.18

Hitung simpangan rata-rata dari data kuantitatif berikut:
12, 3, 11, 3, 4, 7, 5, 11

Jawab:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n) = \frac{1}{8}(12 + 3 + 11 + 3 + 4 + 7 + 5 + 11) = 7$$

$$S_R = \frac{|12-7| + |3-7| + |11-7| + |3-7| + |4-7| + |7-7| + |5-7| + |11-7|}{8}$$

$$= \frac{5+4+4+4+3+0+2+4}{8} = 3,25$$

Jadi, simpangan rata-ratanya adalah 3,25.
Coba Anda tentukan simpangan rata-rata tersebut dengan menggunakan kalkulator. Apakah hasilnya sama?

Untuk sekumpulan data yang dinyatakan oleh $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dan masing-masing nilai data tersebut mempunyai frekuensi $f_1, f_2, \ldots, f_n$ diperoleh nilai simpangan rata-rata (S_R) dengan menggunakan rumus:

$$\boxed{S_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i}}$$

Contoh 1.19

Hitunglah simpangan rata-rata nilai ulangan Fisika dari siswa Kelas XI SMA Merdeka seperti Tabel 1.11 Contoh 1.11.

Jawab:

Dari Contoh 1.15, diperoleh $\bar{x}$ = 65,7 (dibulatkan).

Tokoh Matematika

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Seorang ahli matematika Jerman, Carl Friedrich Gauss, mempelajari penyebaran dari berbagai macam data. Ia menemukan istilah "Standar deviasi" untuk menjelaskan penyebaran yang terjadi. Para ilmuwan sekarang, menggunakan standar deviasi untuk mengestimasi akurasi pengukuran data.

Sumber: *Ensiklopedi Matematika*, 2002

Ingatlah

Simpangan rataan hitung menunjukkan rataan hitung jauhnya datum dari rataan hitung.

Kelas Interval	Nilai Tengah (x_i)	f_i	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
40 – 44	42	3	23,7	71,1
45 – 49	47	4	18,7	74,8
50 – 54	52	6	13,7	82,2
55 – 59	57	8	8,7	69,6
60 – 64	62	10	3,7	37
65 – 69	67	11	1,3	14,3
70 – 74	72	15	6,3	94,5
75 – 79	77	6	11,3	67,8
80 – 84	82	4	16,3	65,2
85 – 89	87	2	21,3	42,6
90 – 94	92	2	26,3	52,6
		$\sum f_i = 71$		$\sum f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert = 671,7$

Jadi, simpangan rata-rata $(S_R) = \dfrac{671,7}{71} = 9,46.$

b. Simpangan Baku

Diketahui sekumpulan data kuantitatif yang tidak dikelompokkan dan dinyatakan oleh $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dari data tersebut, dapat diperoleh nilai simpangan baku (S) yang ditentukan oleh rumus berikut.

$$\boxed{S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}} \quad \text{dan} \quad \boxed{\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}}}$$

untuk sampel untuk populasi

Contoh 1.20

Dari 40 orang siswa diambil sampel 9 orang untuk diukur tinggi badannya, diperoleh data berikut:
165, 170, 169, 168, 156, 160, 175, 162, 169.
Hitunglah simpangan baku sampel dari data tersebut.

Jawab:

$\bar{x} = 166$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Ingatlah

Untuk menghitung simpangan baku dari data kuantitatif: 2, 5, 7, 4, 3, 11, 3 dengan kalkulator ilmiah (*fx*–3600*Pv*) adalah sebagai berikut.

1) Kalkulator "ON"
2) MODE 3 $\longrightarrow$ Program SD
3) Masukkan data
   2 data
   5 data
   …
   …
   …
   3 data
4) Tekan tombol $x_{\sigma n-1}$.
   σ = 2,878491669 = 2,88

Coba Anda hitung simpangan baku untuk Contoh Soal 1.26 dengan kalkulator. Apakah hasilnya sama?

$$= \sqrt{\frac{1+16+9+100+36+81+16+9}{9-1}} = \sqrt{\frac{272}{8}} = 5,83$$

Jadi, simpangan bakunya adalah 5,83.

Sekumpulan data kuantitatif yang dikelompokkan, dapat dinyatakan oleh $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dan masing-masing data mempunyai frekuensi $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Simpangan baku (S) dari data tersebut diperoleh dengan menggunakan rumus

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$ dan $$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \mu)^2}{n}}$$

untuk sampel　　　　untuk populasi

Contoh 1.21

Hitunglah simpangan baku dari nilai ulangan Fisika dari 71 siswa kelas XI SMA Merdeka sesuai Tabel 1.11.

Jawab:

Dari hasil perhitungan sebelumnya diperoleh μ = 65,7.

x_i	f_i	$x_i - \mu$	$(x_i - \mu)^2$	$\sum f_i (x_i - \mu)^2$
42	3	–23,7	561,69	1.685,07
47	4	–18,7	349,69	1.398,76
52	6	–13,7	187,69	1.126,14
57	8	– 8,7	75,69	605,52
62	10	–3,7	13,69	136,9
67	11	1,3	1,69	18,59
72	15	6,3	39,69	595,35
77	6	11,3	127,69	766,14
82	4	16,3	265,69	1.062,76
87	2	21,3	453,69	907,38
92	2	26,3	691,69	1.383,38
	$\sum f_i = 60$			$\sum f_i (x_i - \mu)^2 = 9.685,99$

Jadi, simpangan bakunya $\sigma = \sqrt{\frac{9.685,99}{71}} = 11,68.$

Tantangan untuk Anda

Pada Contoh 1.20, dengan $\bar{x}$ = 166.

1. Hitunglah $\sum_{i=1}^{9} (x_i - \bar{x})^2$.
2. Hitunglah $\sum_{i=1}^{9} (x_i - 163)^2$.
3. Hitunglah $\sum_{i=1}^{9} (x_i - 171)^2$.
4. Hitunglah $\sum_{i=1}^{9} (x_i - 164)^2$.
5. Amatilah hasil-hasil perhitungan 1 sampai dengan 4. Buatlah suatu dugaan umum (kesimpulan).
6. Uji kesimpulan Anda dengan menghitung $\sum_{i=1}^{9} (x_i - 167)^2$.

c. Variansi (Ragam)

Untuk data yang tidak dikelompokkan ataupun data yang dikelompokkan, diperoleh nilai variansi (v) dengan menggunakan rumus:

$$\boxed{v = S^2} \quad \text{dan} \quad \boxed{v = \sigma^2}$$

untuk sampel untuk populasi

Contoh 1.22

Hitunglah variansi dari data Contoh 1.26.

Jawab:

Dari hasil perhitungan Contoh 1.23 diperoleh S = 5,83 maka

$v = S^2 = (5{,}83)^2 = 33{,}99$.

d. Koefisien Keragaman (KK)

Rumus koefisien keragaman (KK) dari sekumpulan data $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ adalah

$$\boxed{KK = \frac{S}{\bar{x}} \times 100}$$

Dalam hal ini S = simpangan baku

$\bar{x}$ = rataan

Contoh 1.22

Pak Murtono seorang pengusaha. Bidang usaha yang ia jalani adalah penerbitan, tekstil, dan angkutan. Dalam 5 bulan terakhir, ia mencatat keuntungan bersih ketiga bidang usahanya. Hasilnya tampak pada Tabel 1.14.

Tabel 1.14 Keuntungan Bersih Usaha Pak Murtono Selama 5 Bulan Terakhir.

Bidang Usaha	Keuntungan Bersih (dalam puluhan juta rupiah)				
Penerbitan	60	116	100	132	72
Tekstil	144	132	108	192	204
Angkutan	80	260	280	72	116

Jika Pak Murtono berpendapat bahwa bidang usaha yang akan dipertahankan hanya dua bidang usaha dengan kriteria bidang usaha dengan keuntungan bersih yang *stabil*, tentukanlah bidang usaha yang sebaiknya tidak dilanjutkan.

Jawab:

Langkah ke-1

Menuliskan apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan soal tersebut.

Diketahui : • keuntungan bersih selama 5 bulan terakhir yang disajikan pada Tabel 1.14.

Situs Matematika

Anda dapat mengetahui informasi lain tentang Statistika melalui internet dengan mengunjungi situs berikut.

- http://elearning.gunadarma.ac.id
- http://www.statcan.ca

- bidang usaha yang dipertahankan adalah yang memiliki keuntungan bersih yang stabil.

Ditanyakan: bidang usaha yang sebaiknya tidak dilanjutkan.

Langkah ke-2

Menentukan konsep yang akan digunakan dalam menyelesaikan soal. Pada soal ini, konsep yang digunakan adalah rataan, simpangan baku, dan koefisien keragaman.

Langkah ke-3

Menghitung rataan, simpangan baku, dan koefisien keragaman dari setiap bidang usaha.

$\Rightarrow$ Bidang usaha penerbitan

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{60 + 116 + 100 + 132 + 72}{5} = 96$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(60-96)^2 + (116-96)^2 + (100-96)^2 + (132-96)^2 + (72-96)^2}{5-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{3584}{4}} = 29,93$$

$$KK = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{29,93}{96} = 0,31$$

$\Rightarrow$ Bidang usaha tekstil

$\bar{x} = 156$

$S = 40,69$

$$KK = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{40,69}{156} = 0,26$$

$\Rightarrow$ Bidang usaha angkutan

$\bar{x} = 161,6$

S = 100.58

$$KK = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{100,58}{161,6} = 0,62$$

Jadi, sebaiknya Pak Murtono tidak melanjutkan usaha angkutan karena keuntungannya tidak stabil (nilai *KK* paling besar).

Hal Penting

- mean
- modus
- median
- simpangan rata-rata
- simpangan baku
- desil
- kuartil
- diagram

Tes Kompetensi Subbab C

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Dari data berikut ini, tentukanlah
   a. modus, median, kuartil bawah, dan kuartil atas;
   b. rataan hitung, simpangan rataan hitung, simpangan baku, dan variansinya.
   1) 5, 8, 10, 4, 8, 7, 5, 6, 3, 4
   2) 55, 62, 70, 50, 75, 55, 62, 50, 70, 55, 75, 80, 48, 62
   3) 165, 155, 160, 156, 168, 174, 180, 160, 165, 155, 166, 170, 156, 178, 175, 172
   4) 203, 235, 224, 207, 205, 215, 230, 220, 225, 224, 230, 207, 215, 235, 225, 220, 215, 203, 220, 205

2. Tabel berikut memperlihatkan data hasil ulangan bahasa Indonesia Kelas XI SMA Hebat.

Interval Kelas	Frekuensi
40 – 44	1
45 – 49	2
50 – 54	1
55 – 59	3
60 – 64	5
65 – 69	8
70 – 74	26
75 – 79	18
80 – 84	18
85 – 89	10
90 – 94	5

Tentukanlah rataan hitungnya menggunakan rataan hitung sementara.

3. Kelas XI A, XI B, dan XI C masing-masing terdiri atas 40 orang, 39 orang, dan 38 orang. Jika nilai rataan hitung ujian Biologi kelas XI A, XI B, XI C masing-masing 50, 65, dan 68, hitunglah nilai rataan hitung ujian Biologi dari seluruh siswa kelas XI itu.

4. Nilai rataan hitung ujian Matematika dari sekelompok siswa yang berjumlah 42 orang adalah 62,5. Jika siswa dari kelompok itu yang bernilai 70 dan 75 tidak dimasukkan dalam perhitungan nilai rataan hitung, berapa nilai rataan hitung ujian matematika yang baru?

5. Nilai rataan hitung ujian Fisika Kelas XI A yang terdiri atas 39 orang adalah 60. Jika seorang siswa mengikuti ujian susulan, berapakah nilai yang harus diperoleh siswa itu agar nilai rataan hitungnya naik 0,25?

6. Hitunglah simpangan rataan hitung dari data nilai Bahasa Indonesia kelas XI SMA Megah pada soal nomor 2.

7. Hitunglah simpangan baku dan variansi dari data tinggi badan siswa Kelas XI SMA Megah pada soal nomor 7.

8. Selama dua tahun supermarket A mencatat keuntungan setiap bulannya (dalam jutaan rupiah) sebagai berikut.

43, 35, 57, 60, 51, 45, 60, 43, 48, 55, 57, 45, 43, 35, 48, 45, 55, 65, 51, 43, 55, 45, 65, 55

Dalam jangka waktu yang sama supermarket B mencatat keuntungan setiap bulannya (dalam jutaan rupiah) sebagai berikut.

67, 78, 70, 83, 80, 56, 70, 81, 45, 50, 81, 56, 70, 55, 70, 61, 51, 75, 55, 83, 67, 54, 68, 54

Jika pada bulan tertentu pengusaha supermarket A memperoleh keuntungan 75 juta, sedangkan supermarket B memperoleh keuntungan 84 juta, pengusaha mana yang berhasil? Jelaskan.

9. Dari 50 orang siswa diambil sampel secara acak 15 orang untuk diukur tinggi badannya, diperoleh data sebagai berikut.

157 172 165 148 173 166 165 160
155 172 157 162 164 165 170

Hitunglah:
   a. rataan hitung,
   b. simpangan baku, dan
   c. variansinya.

10. Pak Amran dan Pak Kadi masing-masing memiliki lima ekor kambing. Berat rataan hitung kambing Pak Amran 36 kg, sedangkan berat rataan hitung kambing Pak Kadi hanya 34 kg. Seekor kambing

Pak Kadi ditukarkan dengan seekor kambing Pak Amran sehingga berat rataan hitung kambing Pak Kadi sama dengan berat rataan hitung kambing Pak Amran. Tentukan selisih berat kambing yang ditukarkan itu.

11. Jelaskan dengan kata-kata Anda sendiri, apa yang dimaksud modus, mean, median, kuartil, dan desil. Jelaskan pula perbedaan dan manfaatnya.

Rangkuman

- Rataan dari sekumpulan data adalah jumlah seluruh data dibagi oleh banyak data.
  Rumus rataan sebagai berikut.
  - Untuk data tunggal

    $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$, dengan x_i = data ke-i
    $\bar{x}$ = rataan
    n = banyak data
  - Untuk data yang dikelompokkan $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i \cdot x_i}{\Sigma f_i}$, dengan f_i = frekuensi data x_i.
- Modus adalah datum yang paling sering muncul.
  Rumus modus sebagai berikut. Untuk data yang dikelompokkan

  $$M_o = L + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) i$$

  Dalam hal ini,
  M_o = modus
  L = tepi bawah dari kelas modus.
  d_1 = selisih antara frekuensi dari kelas yang mengandung modus dan frekuensi dari kelas sebelumnya.
  d_2 = selisih antara frekuensi dari kelas yang mengandung modus dan frekuensi dari kelas berikutnya.
  i = interval kelas.

Sekarang, lanjutkanlah rangkuman di atas.

Refleksi

Setelah Anda mempelajari Bab 1,
1. tuliskanlah materi mana yang menurut Anda sulit dan yang mudah,
2. bagian manakah yang menurut Anda amat menarik dan penting untuk dipelajari.

Tes Kompetensi Bab 1

A. Pilihlah salah satu jawaban dan berikan alasannya.

1. Nilai rataan hitung sekelompok siswa yang berjumlah 40 orang adalah 51. Jika seorang siswa dari kelompok itu yang mendapat nilai 90 tidak dimasukkan dalam perhitungan rataan hitung tersebut maka nilai rataan hitung ujian akan menjadi ....

a. 50 **d.** 47
b. 49 **e.** 46
c. 48

2. Nilai Bahasa Indonesia dari 10 orang siswa yang diambil secara acak adalah 3, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 9. Pernyataan berikut yang benar adalah ....

(1) rataan hitungnya = 6
(2) mediannya = 6,5
(3) modus = 7
(4) jangkauan = 6

Pernyataan yang benar adalah ....

a. (1), (2), dan (3)
b. (1) dan (3)
c. (2) dan (4)
d. (4)
e. Semua benar

3. Simpangan rataan hitung data 10, 10, 9, 8, 8, 7, 7, 6, 6, 5 adalah ....

a. 7,6 **d.** 2,2
b. 6,6 **e.** 1,4
c. 2,8

4. Simpangan rataan hitung data x_1, x_2, ... , x_{10} adalah 2,29. Jika setiap data ditambah satu maka simpangan rataan hitungnya adalah ....

a. 0,29 **d.** 2,39
b. 1,29 **e.** 4,58
c. 2,29

5. Tes Matematika diberikan kepada tiga kelas siswa berjumlah 100 orang. Nilai rataan hitung kelas pertama, kedua, dan ketiga adalah 7,8, dan 7,5. Jika banyaknya siswa kelas pertama 25 orang dan kelas ketiga 5 orang lebih banyak dari kelas kedua, nilai rataan hitung seluruh siswa adalah ....

a. 7,65 **d.** 7,68
b. 7,66 **e.** 7,69
c. 7,67

6. Nilai rataan hitung pada tes Matematika dari 10 siswa adalah 55 dan jika digabung lagi dengan 5 siswa, nilai rataan hitung menjadi 53. Nilai rataan hitung dari 5 siswa tersebut adalah ....

a. 49 **d.** 50,5
b. 49,5 **e.** 51
c. 50

7. Dari empat bilangan diketahui bilangan yang terkecil adalah 30 dan yang terbesar 58. Rataan hitung hitung keempat bilangan itu tidak mungkin ....

(1) < 37 (3) > 51
(2) < 40 (4) > 48

Pernyataan yang benar adalah ....

a. (1), (2), dan (3)
b. (1) dan (3)
c. (2) dan (4)
d. (4)
e. Semua benar

8. Untuk kelompok bilangan
2, 3, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 11

(1) modus lebih dari rataan hitung
(2) median kurang dari rataan hitung
(3) modus = median
(4) modus = rataan hitung

Pernyataan yang benar adalah ....

a. (1), (2), dan (3)
b. (1) dan (3)
c. (2) dan (4)
d. (4)
e. Semua benar

9. Untuk memudahkan perhitungan, semua nilai data pengamatan dikurangi 1300. Nilai-nilai baru menghasilkan jangkauan 28, rataan hitung 11,7, simpangan kuartil 7,4 dan modus 12. Data aslinya mempunyai ....
   (1) rataan hitung = 1311,7
   (2) jangkauan = 28
   (3) modus = 1312
   (4) simpangan kuartil = 657,4

   Pernyataan yang benar adalah ....
   a. (1), (2), dan (3)
   b. (1) dan (3)
   c. (2) dan (4)
   d. (4)
   e. Semua benar

10. Tabel berikut memperlihatkan distribusi frekuensi yang salah satu frekuensinya belum diketahui.

Data	Frekuensi
0	1
2	3
3	2
4	?
5	1

   Rataan hitung yang mungkin dari data itu adalah ....
   a. 0 **d.** 4
   b. 2 **e.** 5
   c. 3

11. Pernyataan yang benar berdasarkan tabel distribusi frekuensi berikut adalah ....

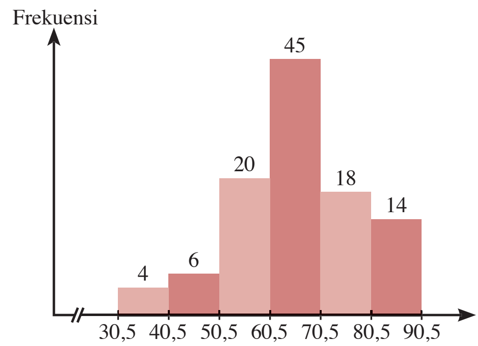
Data	Frekuensi
2	4
4	3
6	2
8	2

   a. modus < median < mean
   b. mean = median
   c. modus < mean < median
   d. mean < median < modus
   e. median < modus < mean

12. Jika jangkauan data 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, x sama dengan rataan hitungnya maka nilai x adalah ....
   a. 1 **d.** 4
   b. 2 **e.** 5
   c. 3

13. Diketahui data 1, 2, 3, 3, 4, 1, x.
   Jika mean = median = 2 maka nilai x adalah ....
   a. 0 **d.** 1,5
   b. 0,5 **e.** 2
   c. 1

14. Median dari data yang disajikan histogram berikut adalah ....



   a. 60,5 **d.** 67,5
   b. 65 **e.** 70,5
   c. 65,5

15. Empat kelompok siswa yang masing-masing terdiri atas 5, 8, 10, dan 17 orang menyumbang korban bencana alam. Rataan hitung sumbangan masing-masing kelompok adalah Rp4.000,00; Rp2.500,00; Rp2.000,00; dan Rp1.000,00. Rataan hitung sumbangan setiap siswa seluruh kelompok itu adalah ....
   a. Rp2.025,00 **d.** Rp1.625,00
   b. Rp1.925,00 **e.** Rp1.550,00
   c. Rp1.750,00

16. Diketahui data x_1, x_2, ..., x_{10}. Jika setiap nilai data ditambah 10 maka ....
   (1) rataan hitungnya ditambah 10
   (2) simpangan rataan hitungnya tetap
   (3) mediannya ditambah 10
   (4) modusnya tetap

   Pernyataan yang benar adalah ....
   a. (1), (2), dan (3)
   b. (1) dan (3)
   c. (2) dan (4)

d. (4)
e. semua benar

17. Data tinggi badan 30 siswa sebagai berikut.

168 159 159 161 158 158 161 158 162 159
155 169 163 159 157 156 161 161 163 162
187 162 158 159 154 188 160 187 162 168

Rataan hitung dari data di atas adalah ....
a. 163,13
b. 164,13
c. 165,03
d. 166,20
e. 167,5

18. Gaji rataan hitung pegawai suatu perusahaan Rp250.000,00. Gaji rataan hitung pegawai prianya Rp260.000,00, sedangkan gaji rataan hitung pegawai wanitanya Rp210.000,00. Berapakah perbandingan jumlah pegawai pria dan pegawai wanita perusahaan itu?
a. 1 : 9
b. 1 : 4
c. 2: 3
d. 3 : 2
e. 4 : 1

19.

Nilai Ujian Matematika	4	5	6	8	10
Frekuensi	20	40	70	a	10

Dalam tabel di atas, nilai rataan hitung ujian matematika adalah 6. Oleh karena itu, a adalah ....
a. 0
b. 5
c. 10
d. 20
e. 30

20. Kuartil bawah dari data pada tabel distribusi frekuensi berikut adalah ....

Nilai	Frekuensi
30 – 39	1
40 – 49	3
50 – 59	11
60 – 69	21
70 – 79	43
80 – 89	32
90 – 99	9

a. 66,9
b. 66,6
c. 66,2
d. 66,1
e. 66,0

21. Tabel berikut memperlihatkan suatu pengukuran. Rataan hitungnya adalah ....

x_i	5	3	1	10
f_i	2	3	1	2

a. 1
b. 3
c. 4
d. 8
e. 9

22. Rataan hitung dari data berikut adalah ....

Nilai	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11
Frekuensi	1	2	1	3	1	1	2	1	2	1

a. 4,5
b. 5,0
c. 5,5
d. 6
e. 6,5

23. Simpangan baku dari data 3, 6, 6, 2, 6, 2, 1, 1, 5, 3 adalah ....
a. 1,6
b. 1,9
c. 2,1
d. 2,3
e. 2,4

24. Simpangan kuartil dari data tabel berikut adalah ....

Nilai	Frekuensi
1 – 10	2
11 – 20	4
21 – 30	25
31 – 40	47
41 – 50	17
51 – 60	5

a. 1,2
b. 2,5
c. 3,4
d. 4,8
e. 5,9

B. Jawablah dengan singkat, tepat, dan jelas.

1. Dari data berikut, tentukan ukuran terkecil, ukuran terbesar, median, kuartil bawah, kuartil atas, jangkauan data, dan jangkauan antarkuartil.
   a. 75, 65, 50, 48, 72, 60, 75, 80, 48, 70, 55
   b. 165, 158, 164, 173, 168, 160, 172, 156, 170, 164, 169, 155, 168
   c. 212, 225, 220, 217, 224, 208, 222, 205, 220, 210, 205, 215
   d. 315, 300, 306, 325, 320, 315, 330, 312, 325, 310, 320, 318, 305, 317

2. Suatu keluarga mempunyai lima orang anak. Anak termuda berumur t tahun dan yang tertua $2(2t - 1)$ tahun. Tiga anak yang lain masing-masing berumur $(t + 2)$ tahun, $(2t + 1)$ tahun, dan $(3t - 1)$ tahun. Jika rataan hitung umur mereka 8,8 tahun, tentukan umur anak termuda dan tertua.

3. Tabel berikut menunjukkan data tinggi badan Kelas XI SMA Megah.

Interval Kelas	Frekuensi
147 – 151	9
152 – 156	5
157 – 161	10
162 – 166	28
167 – 171	27
172 – 176	12

   Tentukanlah:
   a. modus
   b. median, kuartil bawah, dan kuartil atas
   c. rataan hitungnya.

4. Tabel berikut menunjukkan data tabungan domestik (dalam triliun rupiah) per triwulan dari tahun 1993–1998.

Tahun / Triwulan	1993	1994	1995	1996	1997	1998
I	19,0	18,9	23,7	28,6	34,5	46,9
II	19,6	25,2	24,4	29,1	39,1	50,7
III	21,3	25,5	29,1	38,5	39,5	69,6
IV	23,5	29,9	32,7	43,8	39,4	61,6

Sumber: *BPS*, 1998

   a. Buatlah diagram garisnya (tidak setiap triwulan).
   b. Pada triwulan dan tahun berapa tabungan domestik terbesar? Jelaskan.
   c. Pada triwulan dan tahun berapa tabungan domestik terkecil? Jelaskan.
   d. Berapa kali tabungan domestik mengalami penurunan? Jelaskan.

5. Dalam suatu ujian yang diikuti 42 orang diperoleh rataan nilai ujian 30, median 35, dan simpangan baku 8. Oleh karena rataannya terlalu rendah, semua nilai dikalikan 2, kemudian dikurangi 5.
   a. Hitung rataan nilai yang baru.
   b. Hitung median yang baru.
   c. Hitung simpangan baku baru.

Bab 2

Peluang

Setelah mempelajari bab ini, Anda harus mampu menggunakan kaidah pencacahan untuk menentukan peluang suatu kejadian dan penafsirannya dengan cara menggunakan sifat dan aturan perkalian, permutasi, dan kombinasi dalam pemecahan masalah, menentukan ruang sampel suatu percobaan, serta menentukan peluang suatu kejadian dan menafsirkannya.

Anda telah mempelajari konsep peluang di Kelas IX. Pada pembahasan tersebut telah dipelajari tentang ruang sampel dan menghitung peluang suatu kejadian. Pada bab ini, materi akan dikembangkan sehingga Anda memahami konsep permutasi, kombinasi, dan peluang kejadian majemuk.

Teori peluang, lahir pada abad pertengahan di Prancis. Saat ini teori peluang banyak digunakan di berbagai bidang, seperti asuransi, bisnis, biologi, olahraga, dan kesehatan. Salah satunya dapat Anda simak pada uraian berikut ini.

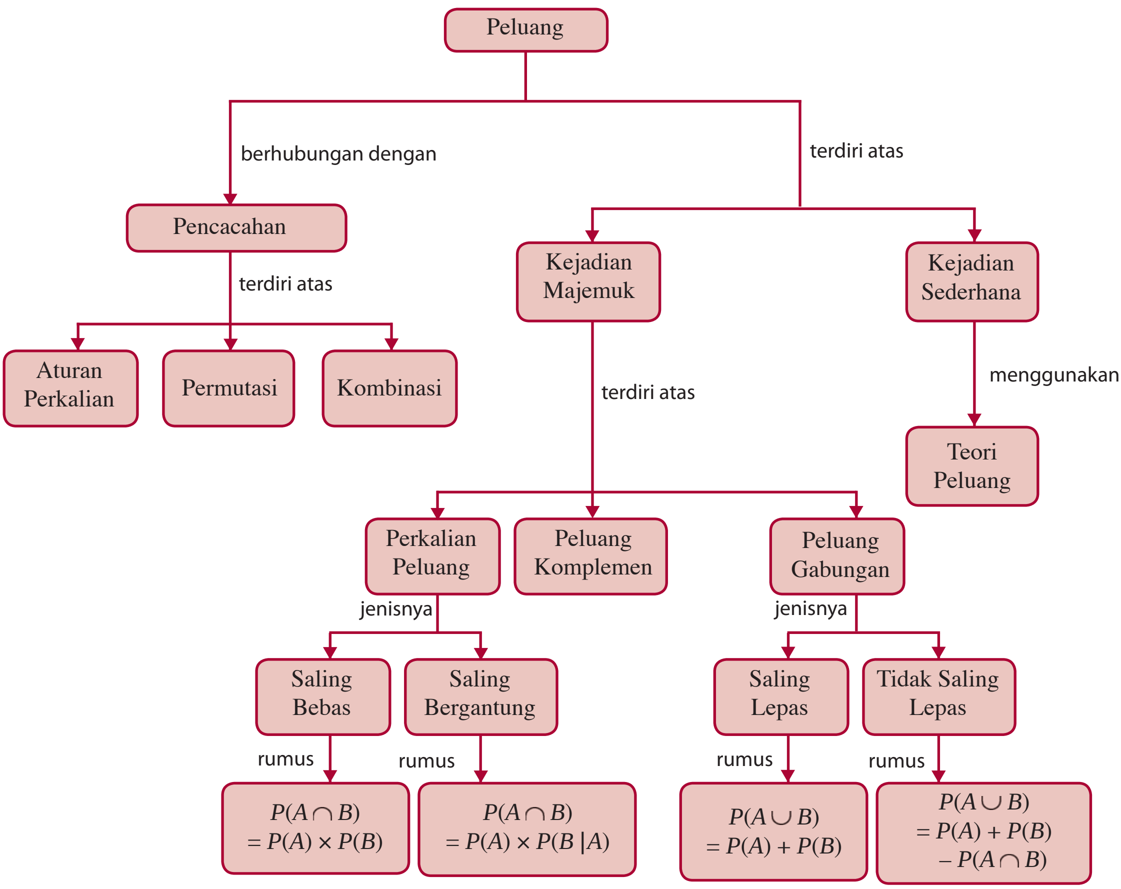
Dari hasil penelitian di suatu kota "X" terhadap 1.000 anak diperoleh data sebagai berikut.

- Peluang anak yang diberi ASI adalah 90%.
- Peluang anak yang mendapatkan imunisasi campak adalah 60%.
- Peluang anak yang mendapatkan vaksin Polio adalah 80%.

Dengan menggunakan konsep peluang, Anda dapat menentukan anak yang mendapatkan imunisasi Campak dan vaksin Polio.

Diagram Alur

Untuk mempermudah Anda dalam mempelajari bab ini, pelajarilah diagram alur yang disajikan sebagai berikut.



Tes Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

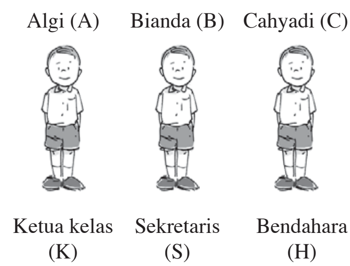
1. Hitunglah
   a. $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$
   b. $\frac{1}{2} + \frac{4}{25} - \frac{3}{25}$
   c. $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$
2. Faktorkanlah suku tiga berikut.
   a. $n^2 - n - 56$
   b. $n^2 + 3n - 70$
3. Jabarkanlah bentuk-bentuk berikut ini.
   a. $(x + y)^2$
   b. $(x + y)^3$
   c. $(x + y)^4$
   d. $(x + y)^5$
4. Peluang seorang penduduk di suatu Rukun Warga (RW) menjadi anggota koperasi adalah 75%. Jika jumlah penduduk RW itu ada 2.000 orang, berapa orang yang menjadi anggota koperasi?

A. Kaidah Pencacahan

1. Aturan Perkalian

Misalkan, dari 3 orang siswa, yaitu Algi, Bianda, dan Cahyadi akan dipilih untuk menjadi ketua kelas, sekretaris, dan bendahara dengan aturan bahwa seseorang tidak boleh merangkap jabatan pengurus kelas. Banyak cara 3 orang dipilih menjadi pengurus kelas tersebut akan dipelajari melalui uraian berikut.

Amati Gambar 2.1.



Gambar 2.1

a. Untuk ketua kelas (K)
   Posisi ketua kelas dapat dipilih dari 3 orang, yaitu Algi (A), Bianda (B), atau Cahyadi (C).
   Jadi, posisi ketua kelas dapat dipilih dengan 3 cara.
b. Untuk Sekretaris (S)
   Jika posisi ketua kelas sudah terisi oleh seseorang maka posisi sekretaris hanya dapat dipilih dari 2 orang yang belum terpilih menjadi pengurus kelas.
   Jadi, posisi sekretaris dapat dipilih dengan 2 cara.
c. Untuk Bendahara (H)
   Jika posisi ketua kelas dan sekretaris sudah terisi maka posisi bendahara hanya ada satu pilihan, yaitu dijabat oleh orang yang belum terpilih menjadi pengurus kelas.
   Jadi, posisi bendahara dapat dipilih dengan 1 cara.

Dengan demikian, banyak cara yang dilakukan untuk memilih 3 orang pengurus kelas dari 3 orang kandidat adalah $3 \times 2 \times 1 = 6$ cara.

Uraian tersebut akan lebih jelas apabila mengamati skema berikut.

K	S	H	*Hasil yang Mungkin*
A	*B*	*C*	*ABC*
	C	*B*	*ACB*
B	*A*	*C*	*BAC*
	C	*A*	*BCA*
C	*A*	*B*	*CAB*
	B	*A*	*CBA*
3 ×	**2** ×	**1** =	**6**

Dari uraian tersebut, dapatkah Anda menyatakan aturan perkalian? Cobalah nyatakan aturan perkalian itu dengan kata-kata Anda sendiri.

Aturan Perkalian

Misalkan,
- operasi 1 dapat dilaksanakan dalam n_1 cara;
- operasi 2 dapat dilaksanakan dalam n_2 cara;
- operasi k dapat dilaksanakan dalam n_k cara.

Banyak cara k operasi dapat dilaksanakan secara berurutan adalah $n = n_1 \times n_2 \times n_3 \ldots \times n_k$.

Contoh 2.1

Berapa cara yang dapat diperoleh untuk memilih posisi seorang tekong, apit kiri, dan apit kanan dari 15 atlet sepak takraw pelatnas SEA GAMES jika tidak ada posisi yang rangkap? (*Tekong adalah pemain sepak takraw yang melakukan sepak permulaan*).

Jawab:
- Untuk posisi tekong.
  Posisi tekong dapat dipilih dengan 15 cara dari 15 atlet pelatnas yang tersedia.
- Untuk posisi apit kiri.
  Dapat dipilih dengan 14 cara dari 14 atlet yang ada (1 atlet lagi tidak terpilih karena menjadi tekong).
- Untuk posisi apit kanan.
  Cara untuk memilih apit kanan hanya dengan 13 cara dari 13 atlet yang ada (2 atlet tidak dapat dipilih karena telah menjadi tekong dan apit kiri).

Dengan demikian, banyak cara yang dilakukan untuk memilih posisi dalam regu sepak takraw adalah $15 \times 14 \times 13 = 2.730$ cara.

Ingatlah

Apabila terdapat n buah tempat yang akan diduduki oleh n orang, terdapat: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$ cara orang menduduki tempat tersebut.

2. Faktorial

Anda telah mempelajari, banyak cara yang dilakukan untuk memilih 3 orang pengurus kelas dari 3 orang kandidat adalah $3 \times 2 \times 1 = 6$ cara.

Selanjutnya, $3 \times 2 \times 1$ dapat dinyatakan dengan 3! (dibaca 3 *faktorial*). Jadi,

$$\boxed{\mathbf{3! = 3 \times 2 \times 1 = 6}}$$

Dengan penalaran yang sama
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times 3! = 4 \times 6 = 24$
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$
$6! = 6 \times 5! = 6 \times 120 = 720$
Uraian tersebut memperjelas definisi berikut.

Definisi 2.1

a. $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \ldots \times 3 \times 2 \times 1$, dengan n bilangan asli, untuk $n \geq 2$.

b. $1! = 1$

c. $0! = 1$

Contoh 2.2

1. Hitunglah

a. $7!$ **b.** $\frac{17!}{0!16!}$ **c.** $\frac{12!}{2!8!}$ **d.** $\frac{8!}{5!}$

2. Nyatakan bentuk-bentuk berikut ke dalam faktorial:

a. $157 \times 156 \times 155$ **b.** $8!(9 \times 10)$ **c.** $n(n - 1)(n - 2)$

3. Tentukan nilai n dari $(n + 3)! = 10(n + 2)!$

Jawab:

1. **a.** $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5.040$

b. $\frac{17!}{0!6!} = \frac{17 \cdot 16!}{1 \cdot 16!} = 17$

c. $\frac{12!}{2!8!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{2!8!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{1 \cdot 2} = 5.940$

d. $\frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$

2. **a.** $157 \times 156 \times 155 = \frac{157 \times 156 \times 155 \times \ldots \times 1}{154 \times 153 \times \ldots \times 1} = \frac{157!}{154!}$

b. $8!(9 \times 10) = (8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)(9 \times 10) = 10!$

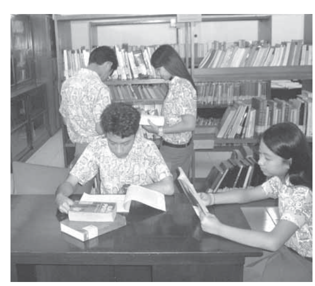
c. $n(n-1)(n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1}{(n-3)(n-4)\ldots 1} = \frac{n!}{(n-3)!}$

3. $(n + 3)! = 10(n + 2)! \Leftrightarrow (n + 3)(n + 2)! = 10(n + 2)!$

$\Leftrightarrow n + 3 = 10\ 0$

$\Leftrightarrow n = 7$

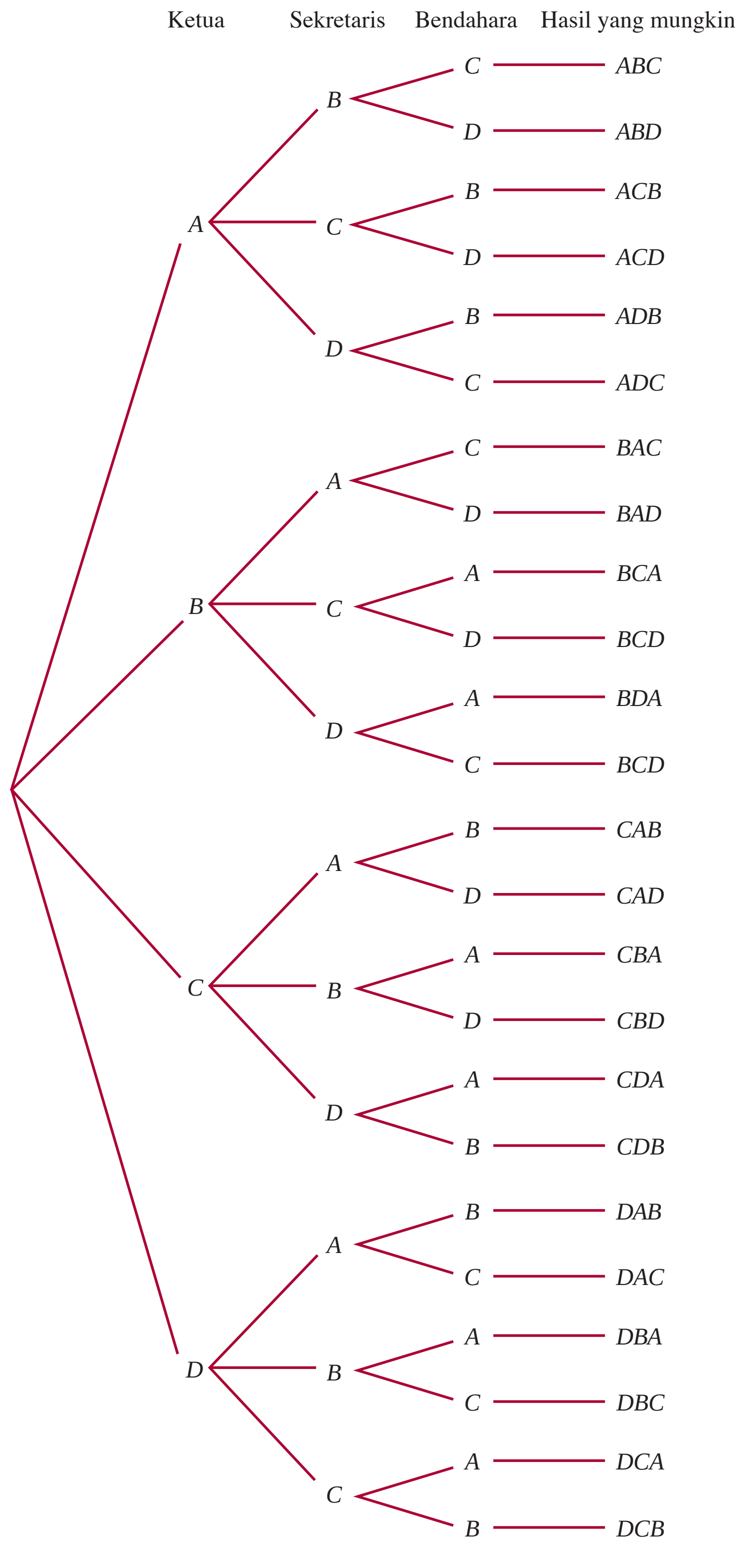
3. Permutasi



Sumber: *Dokumentasi Penerbit*

Gambar 2.2
Calon pengurus kelas

Dalam suatu kelas,terdapat 4 orang yang akan dipilih 3 orang untuk menjadi ketua, sekretaris, dan bendahara. Banyak cara untuk memilih 3 orang tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut. Misal, keempat orang kandidat itu adalah A, B, C, dan D. Posisi ketua dapat dipilih dengan 4 cara, posisi sekretaris dapat dipilih dengan 3 cara, dan posisi bendahara dapat dipilih dengan 2 cara. Jadi banyak cara yang dilakukan untuk memilih 3 orang pengurus kelas dari 4 orang kandidat adalah $4 \times 3 \times 2 = 24$ cara. Uraian tersebut akan lebih jelas apabila Anda mengamati skema berikut.



Ingatlah

Urutan *ABC* berbeda dengan urutan *ACB*. Dalam urutan *ABC*, sekretaris adalah *B*. Dalam urutan *ACB*, sekretaris adalah *C*.

Gambar 2.3
Diagram pohon untuk pemilihan 3 pengurus kelas dari 5 calon yang ada.

Dari skema tersebut diperoleh 24 susunan 3 unsur, yaitu

ABC	*ABD*	*ACB*	*ACD*	*ADB*	*ADC*
BAC	*BAD*	*BCA*	*BCD*	*BDA*	*BCD*
CAB	*CAD*	*CBA*	*CBD*	*CDA*	*CDB*
DAB	*DAC*	*DBA*	*DBC*	*DCA*	*DCB*

Tampak susunan 3 unsur tersebut memperhatikan urutannya. *ABC* adalah suatu permutasi, *ACB* juga suatu permutasi dan keduanya berbeda. Urutan pada 24 susunan itu berlainan. Susunan yang memperhatikan urutannya disebut *permutasi*. Dari uraian tersebut dapatkah Anda menduga pengertian permutasi? Cobalah nyatakan pengertian permutasi dengan kata-kata Anda sendiri. Konsep yang telah Anda pelajari tersebut memperjelas definisi berikut.

Definisi 2.2

Permutasi adalah urutan yang mungkin dari sejumlah unsur yang berbeda tanpa adanya pengulangan.

Banyaknya permutasi 3 unsur yang diambil dari 4 unsur adalah

$4 \times 3 \times 2 = 24.$

Banyaknya permutasi 3 unsur yang diambil dari 4 unsur dapat ditulis

$$P(4\ ,3) = 4 \times 3 \times 2 = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1} = \frac{4!}{(4-3)!}$$

Permutasi r unsur yang diambil dari n unsur dapat dipelajari melalui Tabel 2.1.

Tabel 2.1

Tempat ke-	1	2	3	...	r	...
Banyak Cara	n	$n(n-1)$	$n(n-1)(n-2)$	...	$n(n-1)(n-2)...(n-(r-1))$	...

Dari tabel tersebut, banyak permutasi r unsur yang diambil dari n unsur, dinotasikan $P(n, r)$ adalah

$P(n, r) \ = n(n-1)(n-2) \ldots (n-(r-1))$

Untuk $r = 1$, maka

$P(n, 1) \ = n$

Untuk $r = 2$, maka

$P(n, 2) \ = n(n-1)$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)...(3)(2)(1)}{(n-2)...(n-3)...(3)(2)(1)} = \frac{n!}{(n-2)!}$$

Soal Terbuka

Buatlah sebuah soal permutasi yang berbeda dengan soal yang ada di buku ini. Berikan soal ini ke teman untuk diselesaikan dan beri komentar.

Ingatlah

Notasi $P(n, k)$ dapat juga ditulis dengan P_k^n .

Untuk $r = 3$ maka

$$P(n, 3) = n(n-1)(n-2)$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots(3)(2)(1)}{(n-3)\ldots(n-4)\ldots(3)(2)(1)} = \frac{n!}{(n-3)!}$$

Untuk $r = k$, diperoleh

$$P(n, k) = n(n-1)(n-2)(n-3)\ \ldots\ (n-(k-1))$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(k-1))(n-k)(n-(k+1))\ldots(3)(2)(1)}{(n-k)(n-(k+1))\ldots(3)(2)(1)}$$
$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Untuk $r = n$, diperoleh

$$P(n, n) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))(n-r)\ldots(3)(2)(1) = n!$$

Banyak permutasi n unsur apabila disusun dalam k unsur adalah

$$\boxed{P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}} \text{ dengan } k \le n$$

Contoh 2.3

1. Tiga orang wiraniaga dicalonkan untuk mengisi kekosongan jabatan kepala cabang di dua kota. Tentukan banyak cara untuk memilih dua kepala cabang dari tiga orang wiraniaga tersebut, dengan menggunakan rumus permutasi.

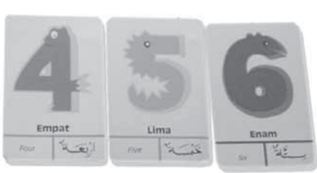
   Jawab:

   $P(3, 2)$, dengan $n = 3$ (banyak wiraniaga) dan $k = 2$ (banyak wiraniaga terpilih).

   $$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} \Leftrightarrow P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3\times 2\times 1}{1!} = 6$$

   Jadi, terdapat 6 cara.

   Coba Anda tentukan ke-6 susunan yang mungkin tersebut.



Sumber: *Dokumentasi Penerbit*

Gambar 2.4

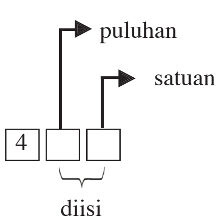
Salah satu susunan yang mungkin. Dapatkah Anda menentukan susunan lainnya?

2. Dari kartu angka 4, 5, 6, 7, dan 8 dibuat bilangan yang terdiri atas tiga angka yang *berbeda*. Tentukan banyaknya bilangan-bilangan tersebut yang kurang

   a. dari 500 **b.** dari 600

   Jawab:

   a. Oleh karena bilangan-bilangan kurang dari 500 maka angka ratusan hanya dapat diisi oleh satu angka, yaitu angka 4. Salah satu susunan yang mungkin dapat Anda lihat pada Gambar 2.4.



Gambar 2.5

   Amati gambar 2.5.

   Angka puluhan dan satuan dapat diisi oleh angka 5, 6, 7, dan 8. Ini berarti Anda harus memilih dua angka dari 4 angka, yaitu

   $$P(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12.$$

Jadi, terdapat 12 cara untuk menyusun bilangan kurang dari 500. Dapatkah Anda mengerjakan dengan cara lain? Silakan coba. Sekarang, coba Anda buktikan hal ini dengan menggunakan kartu angka. Tentukan pula susunan-susunan yang mungkin.

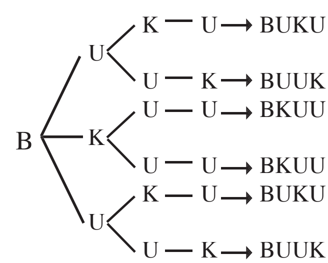
b. Oleh karena bilangan-bilangan itu kurang dari 600 maka angka ratusan hanya diisi oleh dua angka, yaitu angka 4 dan 5.
4 $\rightarrow$ angka puluhan dan satuan dapat diisi oleh angka 5, 6, 7, dan 8 (pilih 2 dari 4 unsur).
5 $\rightarrow$ angka puluhan dan satuan dapat diisi oleh angka 4, 6, 7, dan 8 (pilih 2 dari 4 unsur).
Banyak bilangan yang kurang dari 600 adalah

$$2 \times P(4,2) = 2\times\frac{4!}{(4-2)} = 2\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1} = 24.$$

Jadi, terdapat 24 bilangan yang kurang dari 600.

a. Permutasi Beberapa Unsur yang Sama

Pada kata "BUKU" terdapat dua huruf yang sama, yaitu U. Permutasi huruf-huruf pada kata "BUKU" dapat Anda amati pada diagram pohon di samping.



Coba Anda buat diagram pohon untuk huruf-huruf: U, K, dan U. Jika benar mengerjakannya, hasil dari seluruh diagram pohon tersebut adalah sebagai berikut.

1. BUKU	6. BUUK	11. UBUK	16. KBUU	21. UUBK
2. BUUK	7. UKBU	12. UBKU	17. KUUB	22. UUKB
3. BKUU	8. UKUB	13. KUBU	18. KUBU	23. UKBU
4. BKUU	9. UUBK	14. KUUB	19. UBUK	24. UKUB
5. BUKU	10. UUKB	15. KBUU	20. UBKU	

Amatilah 24 susunan huruf tersebut. Tampak ada beberapa susunan huruf yang sama sehingga permutasinya menjadi:

1. BUKU	4. UKBU	7. UUKB	10. KUBU
2. BUUK	5. UKUB	8. UBUK	11. KUUB
3. BKUU	6. UUBK	9. UBKU	12. KBUU

Banyak permutasi huruf-huruf pada kata "BUKU" adalah 12 atau $12 = 4 \times 3 = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1} = \frac{4!}{2!}$.

Sekarang, selidikilah permutasi untuk kata MAMA dengan menggunakan diagram pohon. Jika Anda melakukan dengan benar, terdapat 6 permutasi yang berbeda, yaitu MAMA, MAAM, MMAA, AMMA, AMAM, dan AAMM, karena kata "MAMA" mempunyai dua pasang huruf yang sama.

Banyak permutasi untuk 4 unsur dengan dua pasang unsur sama, yaitu M dan dua unsur lainnya, yaitu A adalah

$$6 = 3! = 3\times2\times1 = \frac{4\times3\times2\times1}{4} = \frac{4\times3\times2\times1}{(2\times1)(2\times1)} = \frac{4!}{2!2!}.$$

Banyaknya permutasi n unsur yang mempunyai l_1 unsur jenis pertama, l_2 unsur jenis kedua, l_3 unsur jenis ketiga, dan l_k unsur jenis ke-k yang sama adalah

$$\boldsymbol{P(n, l_1, l_2 \ldots l_k) = \frac{n!}{I_1!I_2!\ldots I_k!}}$$

Contoh 2.4

Tentukan permutasi atas semua unsur yang dapat dibuat dari kata-kata berikut.

1. JAYAPURA **2.** MATEMATIKA

Jawab:

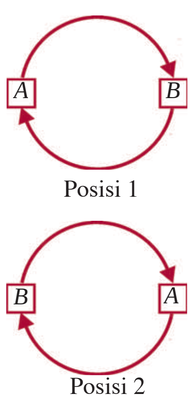
1. Pada kata "JAYAPURA", terdapat 3 buah A yang sama sehingga permutasinya adalah $P(8, 3) = \dfrac{8!}{3!} = 6.720.$

2. Pada kata "MATEMATIKA" terdapat 2 buah M, 3 buah A, dan 2 buah T yang sama sehingga permutasinya adalah

$$P(10, 2, 3, 2) = \frac{10!}{2!3!2!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1)(3 \times 2 \times 1)(2 \times 1)} = 151.200$$

b. Permutasi Siklis



Gambar 2.6

Permutasi yang dibuat dengan menyusun unsur secara melingkar menurut arah putaran tertentu disebut *permutasi siklis*.

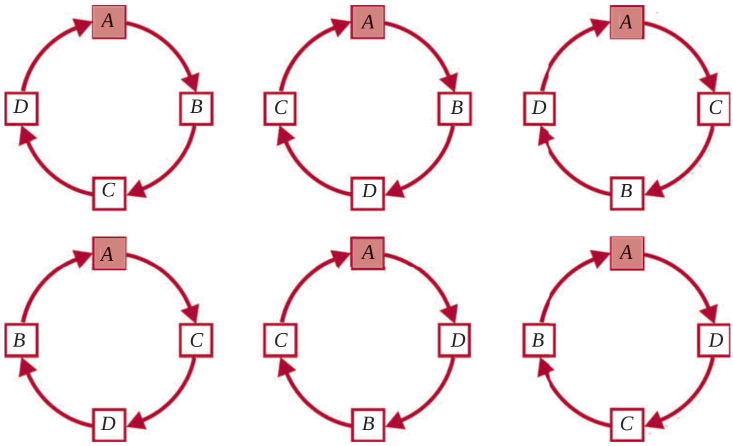
Pada Gambar 2.6 posisi 1 dan posisi 2 menunjukkan permutasi *A* dan *B* yang disusun melingkar searah putaran jarum jam. Coba Anda amati Gambar 2.5, apakah susunan pada posisi 1 berbeda dengan susunan pada posisi 2? Apabila Anda mengamati dengan saksama maka

posisi 1 = posisi 2

Jadi, permutasi siklis dua unsur mempunyai satu cara.

Pada permutasi siklis dua unsur, satu unsur ditetapkan sebagai titik acuan. Sementara, satu unsur yang lainnya ditempatkan dalam 1! cara atau (2 – 1)! cara.

Agar Anda lebih memahami permutasi siklis, pelajari uraian berikut ini. Misalkan, dalam satu ruangan ada 4 orang masing-masing diberi nama *A*, *B*, *C*, dan *D*. Keempat orang tersebut sedang membaca di meja bundar. Banyak cara keempat orang itu duduk melingkari meja bundar dapat diterangkan sebagai berikut.



Keterangan: huruf yang diwarnai dianggap sebagai titik pangkal.

Dengan cara yang sama, Anda dapat membuat formasi lingkaran untuk titik pangkal *B*, *C*, dan *D*. Hasil dari seluruh formasi lingkaran tersebut adalah sebagai berikut.

1. *ABCD*	7. *BACD*	13. *CABD*	19. *DABC*
2. *ABDC*	8. *BADC*	14. *CADB*	20. *DACB*
3. *ACBD*	9. *BCAD*	15. *CBAD*	21. *DBAC*
4. *ACDB*	10. *BCDA*	16. *CBDA*	22. *DBCA*
5. *ADBC*	11. *BDAC*	17. *CDAB*	23. *DCAB*
6. *ADCB*	12. *BDCA*	18. *CDBA*	24. *DCBA*

Amati bahwa ada susunan-susunan yang sama, yaitu

$ABCD = BCDA = CDAB = DABC$ $\quad$ $ACDB = BACD = CDBA = DBAC$

$ABDC = BDCA = CABD = DCAB$ $\quad$ $ADBC = BCAD = CADB = DBCA$

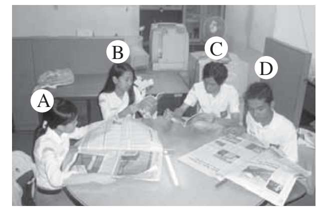
$ACBD = BDAC = CBDA = DACB$ $\quad$ $ADCB = BADC = CBAD = DCBA$

Dengan demikian, dari 24 susunan tersebut terdapat 6 susunan yang berbeda, yaitu *ABCD*, *ABDC*, *ACBD*, *ACDB*, *ADBC*, dan *ADCB*. Jadi, banyak permutasi siklis dari 4 unsur ada 6.

Pada permutasi siklis dari 4 unsur, ditetapkan satu unsur sebagai titik pangkal, kemudian 3 unsur lainnya ditempatkan dalam 3! cara atau (4 – 1)! cara. Permutasi siklis 4 unsur adalah $(4 - 1)! = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ cara.

Susunan manik-manik pada kalung mirip susunan melingkar, tetapi berbeda dengan permutasi siklis. Pada permutasi siklis, arah putaran diperhatikan, sedangkan pada susunan manik-manik dalam kalung arah putaran tidak diperhatikan. Amati Gambar 2.7.

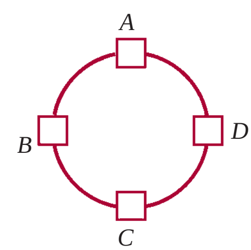
Dari gambar, susunan manik-manik pada posisi 1 adalah *ABC* atau ditulis *ACB*. Adapun susunan manik-manik pada posisi 2 adalah *ACB* atau ditulis *ABC*.

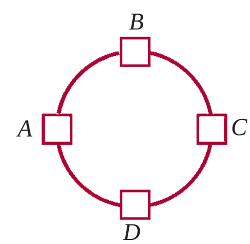


Sumber: *Dokumentasi Penerbit*

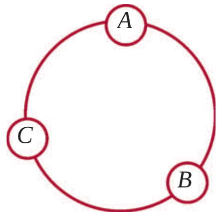
Gambar 2.7
Contoh permutasi siklis

Ingatlah

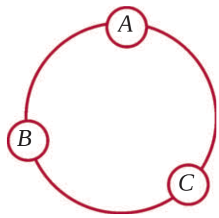




Susunan pada gambar (a) dan gambar (b) adalah sama karena unsur *A* dekat dengan *D* dan *B*, meskipun titik acuan berbeda.



Posisi (1)



Posisi (2)

Gambar 2.8

Susunan manik-manik pada Gambar 2.8 adalah sama. Oleh karena itu, banyak cara menyusun 3 manik-manik dalam kalung adalah 1 susunan. Banyaknya cara yang digunakan untuk menyusun 3 manik-manik dalam kalung adalah setengah dari banyak permutasi siklis 3 unsur, yaitu 1 susunan atau $\frac{(3-1)!}{2}$.

Untuk n unsur, apabila disusun seperti manik-manik dalam kalung terdapat $\frac{(n-1)!}{2}$ susunan yang berbeda.

Contoh 2.5

1. Delapan orang ilmuwan duduk melingkar di sebuah meja bundar untuk membahas sebuah proyek tertentu. Berapa banyak cara agar para ilmuwan dapat duduk melingkar dengan urutan yang berbeda?
2. Dua puluh lima mutiara akan dibuat sebuah kalung. Ada berapa cara mutiara-mutiara itu dapat disusun?

Jawab:

1. Susunan kedelapan ilmuwan itu adalah (8–1)! = 7! = 5.040 cara.
2. Banyaknya cara mutiara itu dapat disusun menjadi sebuah kalung adalah

   $$\frac{(25-1)}{2} = \frac{24!}{2} \text{ cara.}$$

4. Kombinasi

Pada permutasi, Anda telah dapat memilih 3 orang dari 5 orang untuk menjadi ketua, sekretaris, dan bendahara. Lain halnya jika dari 5 orang itu akan dipilih 3 orang untuk mengikuti lomba debat. Banyak cara untuk memilih 3 orang tersebut tidak sebanyak 60 cara seperti pada pemilihan ketua, sekretaris, dan bendahara. Agar lebih jelasnya, pelajari uraian berikut.

Misalkan, dari 5 orang akan dipilih 3 orang untuk mengikuti lomba debat. Banyak cara untuk memilih 3 orang tersebut dapat diterangkan sebagai berikut.

Dari Subbab A.3 telah dijelaskan bahwa susunan 3 unsur dari 5 unsur, yaitu

ABC	*ADE*	*BCD*	*CAB*	*CDE*	*DBC*	*EAB*	*ECD*
ABD	*AEB*	*BCE*	*CAD*	*CEA*	*DBE*	*EAC*	*EDA*
ABE	*AEC*	*BDA*	*CAE*	*CEB*	*DCA*	*EAD*	*EDB*
ACB	*AED*	*BDC*	*CBA*	*CED*	*DCB*	*EBA*	*EDC*

Ingatlah

Kombinasi *ABC* sama dengan kombinasi *CBA* atau *ACB*.

ACD	*BAC*	*BDE*	*CBD*	*DAB*	*DCE*	*EBC*
ACE	*BAD*	*BEA*	*CBE*	*DAC*	*DEA*	*EBD*
ADB	*BAE*	*BEC*	*CDA*	*DAE*	*DEB*	*ECA*
ADC	*BCA*	*BED*	*CDB*	*DBA*	*DEC*	*ECB*

Oleh karena pemilihan 3 orang untuk mengikuti lomba debat tidak memperhatikan urutan maka dari 60 susunan itu terdapat 10 susunan yang berbeda. Kesepuluh susunan tersebut adalah *ABC*, *ABD*, *ABE*, *ACD*, *ACE*, *ADE*, *BCD*, *BCE*, *BDE*, dan *CDE*.

Susunan yang tidak memperhatikan urutannya disebut *kombinasi*.

Dari uraian tersebut, dapatkah Anda menyatakan pengertian kombinasi? Cobalah nyatakan pengertian kombinasi dengan kata-kata Anda sendiri.

Konsep pengertian kombinasi yang telah Anda pelajari tersebut memperjelas definisi berikut.

Soal Terbuka

Jelaskan perbedaan antara permutasi dan kombinasi. Beri contoh untuk memperjelas uraian Anda.

Definisi 2.3

Kombinasi r unsur dari n unsur ialah himpunan bagian r unsur yang dapat diambil dari n unsur yang berlainan dengan urutan penyusunan unsur tidak diperhatikan.

Banyaknya kombinasi r unsur dari n unsur dilambangkan dengan C_n^r atau $\binom{n}{r}$ atau C =(n, r).

a. Menentukan Banyak Kombinasi

Telah diketahui bahwa banyaknya kombinasi 5 unsur berlainan jika disusun sebanyak 3 unsur adalah $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ cara .

Kombinasi 5 unsur yang disusun atas 3 unsur ditulis

$$C_5^3 = \frac{5 \times 4}{2} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{5!}{(5-3)!3!}$$

Uraian tersebut memberi gambaran mengenai banyaknya kombinasi n unsur berlainan jika disusun sebanyak r unsur yang dirumuskan

$$\boxed{C_5^3 = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}} \text{ dengan } r \leq n$$

Pembahasan Soal

Suatu pertemuan dihadiri oleh 15 orang undangan. Jika mereka saling berjabat tangan, banyak jabat tangan yang terjadi dalam pertemuan itu adalah ....

Jawab:

Banyak jabat tangan = $C(15,2)$

$= \frac{15!}{2!13!} = 105$

Soal Ebtanas 2000

Pembahasan Soal

Banyaknya segitiga yang dapat dibuat dari 7 titik tanpa ada tiga titik yang terletak segaris adalah ....

Jawab:

Membuat segitiga dengan memilih 3 titik dari 7 titik yang tersedia adalah masalah kombinasi $C(7, 3)$. Jadi, banyaknya segitiga = $C(7,3)$

$= \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 35$

Soal UMPTN 2000

Contoh 2.6

Kerjakan soal-soal berikut.

1. Diketahui $C_n^2 = 4n$, tentukanlah nilai n.
2. Dari 20 siswa akan dipilih sebuah tim sepakbola yang terdiri atas 11 orang. Tentukan banyak cara dalam pemilihan tersebut.

Jawab:

1. $C_n^2 = 4n \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 4n$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = 4n$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = 4n$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) = 8n$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n = 8n$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 9n = 0$$

$$\Leftrightarrow n(n-9) = 0$$

Oleh karena $n \geq r$ maka yang memenuhi adalah $n = 9$.

2. Pemilihan tim sepakbola tersebut adalah masalah kombinasi karena tidak memperhatikan urutan. Banyak cara memilih 11 orang siswa dari 20 siswa, yaitu C_{20}^{11}.

$$C_{20}^{11} = \frac{20!}{11!(20-11)!} = \frac{20!}{11!9!}$$

$$= \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11!}{11!(9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}$$

$$= 167.960$$

Coba Anda tentukan susunannya dengan diagram pohon.

b. Binomial Newton

Di SMP Anda telah mempelajari cara menjabarkan bentuk perpangkatan berikut.

$(a + b)^0 = 1$

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Untuk pangkat 4, Anda masih dapat menjabarkannya. Bagaimana menjabarkan $(a+b)^{15}$? Untuk menyelesaikannya Anda memerlukan rumus umum bentuk perpangkatan tersebut.

Amati dengan saksama koefisien-koefisien bentuk-bentuk perpangkatan tersebut. Apabila koefisien-koefisien dari bentuk perpangkatan dituliskan dalam bentuk diagram, diperoleh

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

dan seterusnya.

Diagram itu dikenal dengan nama *Segitiga Pascal*. Amati pola Segitiga Pascal tersebut.

Baris ke-1: $\boxed{1}$

Baris ke-2: $\boxed{1}\boxed{1}$

Baris ke-3: $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}$

Baris ke-4: $\boxed{1}\boxed{(1+2)}\boxed{(2+1)}\boxed{1}$

Baris ke-5: $\boxed{1}\boxed{(1+1+2)}\boxed{(1+2)+(2+1)}\boxed{(2+1+1)}\boxed{1}$

dan seterusnya.

Karena $\binom{0}{0} = \binom{1}{0} = \binom{1}{1} = \binom{2}{0} = \binom{2}{2} = \binom{3}{0} = \binom{3}{3} = 1$, $\binom{2}{1} = 2$, dan $\binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3$ maka pola Segitiga Pascal tersebut dapat dituliskan dalam bentuk simbol banyaknya kombinasi berikut.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array}$$

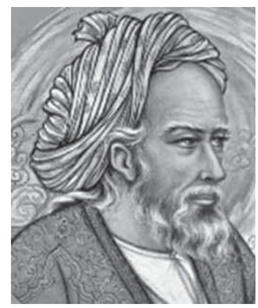
dan seterusnya.

Dari uraian tersebut, bentuk perpangkatan dapat dituliskan sebagai berikut.

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}$$

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$$

Tokoh Matematika



Omar Khayyam (1049–1123)

Untuk $n = 2$, Teorema Binomial telah ditemukan oleh Euclid pada tahun 300 Sebelum Masehi. Akan tetapi, untuk yang lebih umum ditemukan oleh matematikawan dan ahli astronomi Irak, yaitu Omar Khayyam.

Sumber: *Precalculus,* 1999

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

dan seterusnya.

Secara umum bentuk $(a + b)^n$ dapat ditulis menjadi

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^{n-1}b + ... + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

dengan $\binom{n}{r} = C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

Dengan demikian,

$$C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + ... + C_n^{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + C_n^n \cdot b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i a^{n-i} b^i$$

Bentuk tersebut dinamakan *binomial Newton* (*ekspansi binomial*).

Contoh 2.7

Jabarkan dan sederhanakan bentuk $(x^2 + 2y)^5$.

Jawab:

$$(x^2+2y)^5 = \binom{5}{0}(x^2)^5 + \binom{5}{1}(x^2)^4(2y)^1 + \binom{5}{2}(x^2)^3(2y)^2 + \binom{5}{3}(x^2)^2(2y)^3 + \binom{5}{4}(x^2)^1(2y)^4 + \binom{5}{5}(2y)^5$$

$$= x^{10} + 10x^8y + 40x^6y^2 + 80x^4y^3 + 80x^2y^4 + 32y^5$$

Mari, Cari Tahu

Carilah di perpustakaan buku petunjuk penggunaan kalkulator, cara menghitung faktorial, permutasi, dan kombinasi dengan kalkulator *scientific*. Anda juga dapat menanyakan hal tersebut ke kakak kelas. Demonstrasikan dan laporkan hasilnya di depan kelas termasuk jenis kalkulator yang digunakan.

Tes Kompetensi Subbab A

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Dalam sebuah perkumpulan panjat tebing ada 5 calon untuk ketua, 4 calon untuk wakil ketua, 3 calon untuk sekretaris, dan 4 calon untuk bendahara. Apakah masalah ini adalah kombinasi atau permutasi? Ada berapa cara keempat posisi tersebut dapat diisi?

2. Dengan menggunakan 5 huruf pertama dalam abjad, dibuat kata yang terdiri atas 3 huruf. Berapa banyak kata yang dapat dibuat jika:
   a. tidak ada huruf boleh diulang,
   b. huruf-huruf boleh diulang, dan
   c. hanya huruf-huruf pertama tidak boleh diulang.
3. Ketua dan wakil OSIS harus dipilih di antara 8 orang laki-laki dan 4 orang perempuan. Dalam berapa cara hal itu dapat dilakukan jika
   a. ketua harus laki-laki, sedangkan wakilnya boleh laki-laki atau perempuan;
   b. ketua harus perempuan, sedangkan wakilnya boleh laki-laki atau perempuan;
   c. wakilnya harus laki-laki;
   d. wakilnya harus perempuan.
4. Empat orang siswa masuk ruang rapat. Tempat yang masih kososng ada 5 kursi, berapa cara mereka dapat mengambil tempat duduk?
5. Hitung nilai n dari persamaan berikut.
   a. $(n + 4)! = 9(n + 3)!$
   b. $(n + 3)! = 20(n + 1)!$
6. Bilangan yang terdiri atas tiga angka berbeda, disusun dari angka 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8. Tentukan banyak bilangan dengan angka-angka yang berlainan dan lebih kecil dari 500.
7. Tentukan berapa cara yang berbeda dapat dituliskan dari hasil kali $x^4\ y^3\ z^2$ tanpa menggunakan eksponen.
8. Tentukan suku keempat dari penjabaran dan penyederhanaan bentuk $(3x^2 - 4y^3)^7$.
9. Dalam pertemuan untuk menentukan tanggal kelulusan siswa, 20 orang guru diundang, setelah memutuskan tanggal kelulusan, mereka saling berjabat tangan. Berapa banyak jabat tangan yang terjadi?
10. Jika $5P(n, 3) = 24\ C(n, 4)$, berapa nilai n?

Untuk soal nomor 11–16, tentukan banyak cara yang dapat dilakukan.

11. Mengatur susunan tempat duduk dalam suatu rapat yang disusun melingkar dan dihadiri oleh 8 orang serta ada 2 orang yang selalu berdampingan.
12. Memilih 5 orang dari 15 orang siswa untuk menjadi pelaksana upacara bendera Senin pagi.
13. Menentukan tiga orang pemenang juara 1, 2, dan 3 dari 15 orang finalis.
14. Menentukan lima orang pemain cadangan dari 16 orang anggota kesebelasan sepakbola.
15. Menyusun lima buku Matematika yang sama, tiga buku Fisika yang sama, tiga buku Kimia yang sama, dan dua buku Biologi yang sama dalam rak buku. (Petunjuk: *buku-buku yang berjudul sama harus berdampingan*)

B. Peluang

Sebuah uang logam yang bentuknya simetris ditos (dilempar ke atas sambil diputar) dan dibiarkan jatuh ke lantai. Oleh karena uang itu bentuknya simetris maka tidak beralasan munculnya gambar lebih sering atau kurang daripada munculnya angka. Secara matematika, nilai peluang munculnya *gambar* adalah salah satu dari dua atau $\frac{1}{2}$, dan dengan sendirinya nilai peluang munculnya *angka* adalah $\frac{1}{2}$ juga.

(a)

(b)

(c)

(d)

Gambar 2.9

Seperangkat kartu remi.

(a) Kartu hati yang berwarna merah.

(b) Kartu wajik yang berwarna hitam.

(c) Kartu *diamond* yang berwarna merah.

(d) Kartu kriting yang berwarna hitam.

1. Peluang Suatu Kejadian

a. Kejadian Sederhana

Dalam seperangkat kartu remi terdapat 13 kartu merah bergambar hati, 13 kartu merah bergambar *diamond*, 13 kartu hitam bergambar wajik, dan 13 kartu hitam bergambar kriting. Sebuah kartu diambil secara acak dari seperangkat kartu tersebut.

Misalkan, kartu yang terambil bergambar hati. Kejadian muncul kartu bergambar hati pada pengambilan tersebut dinamakan kejadian sederhana karena muncul kartu bergambar hati pasti berwarna merah. Lain halnya jika kartu yang terambil berwarna merah. Kejadian muncul kartu berwarna merah dinamakan kejadian bukan sederhana karena muncul kartu berwarna merah belum tentu bergambar hati, tetapi mungkin bergambar *diamond*.

b. Ruang Sampel

Jika sekeping uang logam ditos, akan muncul muka angka (A) atau muka gambar (G). Pada pengetosan tersebut, A dan G dinamakan *titik sampel*, sedangkan $\{A, G\}$ dinamakan *ruang sampel*. Jika sebuah dadu ditos, titik sampelnya adalah mata dadu 1, 2, 3, 4, 5, dan 6, sedangkan ruang sampelnya adalah $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Dari uraian tersebut, dapatkah Anda menyatakan pengertian ruang sampel? Cobalah nyatakan pengertian ruang sampel dengan kata-kata Anda sendiri.

Konsep yang telah Anda pelajari tersebut memperjelas definisi berikut.

Definisi 2.4

Ruang sampel adalah himpunan semua titik sampel atau himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan. Ruang sampel dinotasikan dengan S.

Contoh 2.8

Tentukan ruang sampel percobaan berikut.

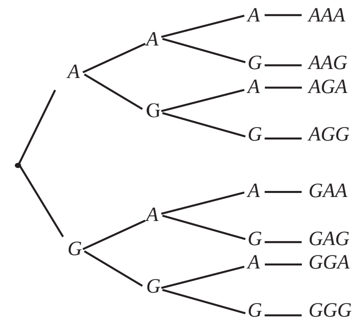
a. Tiga keping uang logam ditos bersamaan.

b. Dua keping uang logam dan sebuah dadu ditos bersamaan.

Jawab:

a. Perhatikan diagram pohon pada Gambar 2.10 di samping dengan saksama. Dari diagram tersebut, jika tiga keping uang logam ditos bersamaan, ruang sampelnya adalah {*AAA*, *AAG*, *AGA*, *AGG*, *AGG*, *GAA*, *GAG*, *GGA*, *GGG*}.

b. Dua keping uang logam dan sebuah dadu ditos, ruang sampelnya (amati Tabel 2.3) adalah { *AA*1, *AA*2, *AA*3, *AA*4, *AA*5, *AA*6, *AG*1, *AG*2, *AG*3, *AG*4, *AG*5, *AG*6, *GA*1, *GA*2, *GA*3, *GA*4, *GA*5, *GA*6, *GG*1, *GG*2, *GG*3, *GG*4, *GG*5, *GG*6}.



Gambar 2.10
Diagram pohon pelemparan 3 keping uang logam.

Tabel 2.3

1 Dadu / 2 Uang Logam	1	2	3	4	5	6
AA	*AA*1	*AA*2	*AA*3	*AA*4	*AA*5	*AA*6
AG	*AG* 1	*AG*2	*AG*3	*AG*4	*AG*5	*AG*6
GA	*GA*1	*GA*2	*GA*3	*GA*4	*GA*5	*GA*6
G G	*GG*1	*GG*2	*GG*3	*GG*4	*GG*5	*GG*6

Mari, Cari Tahu

Bersama dengan teman sebangku, cari di internet atau di buku terbitan luar negeri artikel yang berhubungan dengan materi peluang. Kemudian, kumpulkan hasilnya pada guru Anda.

Tantangan untuk Anda

1. Tiga keping uang logam dilemparkan secara bersamaan. Tentukan
   a. ruang sampel,
   b. kejadian muncul dua angka.
2. Sebuah tas berisi 5 kelereng merah, 5 kelereng putih, dan 9 kelereng hijau. Apabila diambil 3 kelereng sekaligus secara acak, tentukan peluang yang terambil:
   a. semua hijau;
   b. semua putih;
   c. 2 merah dan 1 hijau.

c. Peluang

Misalkan, sekeping uang logam yang bentuknya simetris ditos sebanyak 50 kali, kejadian munculnya muka gambar sebanyak 23 kali sehingga $\frac{23}{50} = 0,46$ dinamakan frekuensi relatif muncul muka gambar. Jika pengetosan uang logam tersebut dilakukan berulang-ulang dalam frekuensi yang besar, *frekuensi relatif* kejadian muncul muka gambar akan mendekati suatu bilangan tertentu, yaitu $\frac{1}{2}$. Bilangan tersebut dinamakan *peluang* dari kejadian muncul angka.

Pada pengetosan sekeping uang logam yang bentuknya simetris, kemungkinan yang muncul hanya dua, yaitu permukaan gambar dan permukaan angka. Peluang muncul permukaan gambar atau permukaan angka sama. Secara matematika, peluang munculnya permukaan gambar adalah satu dari dua kemungkinan atau $\frac{1}{2}$ sehingga peluang munculnya permukaan angka juga $\frac{1}{2}$.

Gambar 2.11
Hasil yang mungkin dari pelemparan sebuah uang logam Rp500,00.

Ingatlah

Mata uang yang bentuknya simetris artinya tidak lebih berat ke arah gambar atau ke arah angka.

Misalkan, sebuah kotak berisi 8 bola, yaitu 3 bola merah, 1 bola putih, dan 4 bola hijau. Dari kotak tersebut, akan diambil sebuah bola. Peluang terambil 1 bola dari kotak yang berisi 8 bola tersebut adalah $\frac{1}{8}$. Peluang terambilnya 1 bola merah adalah $\frac{3}{8}$. Adapun peluang terambilnya 1 bola putih adalah $\frac{1}{8}$, dan peluang terambil 1 bola hijau adalah $\frac{4}{8}$.

Diketahui, N adalah banyak titik sampel pada ruang sampel S dari sebuah percobaan. Kejadian A adalah salah satu kejadian pada percobaan tersebut sehingga peluang A adalah $P(A) = \frac{1}{N}$.

Apabila banyak kejadian A yang terjadi dari percobaan tersebut adalah n, peluang terjadinya kejadian A adalah $P(A) = \frac{n}{N}$.

Contoh 2.9

Dalam pengetosan sebuah dadu yang seimbang, tentukan

a. peluang muncul angka prima;

b. peluang muncul kelipatan 2;

Jawab:

Pada pengetosan sebuah dadu, ruang sampelnya adalah $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to n(S) = 6$.

a. Peluang muncul angka prima.

Ruang sampel mata dadu angka prima adalah $P = \{2, 3, 5\}$ maka $n(P) = 3$, Dengan demikian, peluang muncul angka prima adalah

$$P(\text{prima}) = \frac{n(P)}{N(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

b. Peluang muncul kelipatan 2.

Ruang sampel mata dadu angka kelipatan 2 adalah $K = \{2, 4, 6\}$ maka $n(K) = 3$. Dengan demikian, peluang muncul kelipatan 2 adalah

$$P(K) = \frac{n(K)}{N(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Informasi untuk Anda

Informations for You

Pada 2000 tahun Sebelum Masehi, orang kaya dan penyihir menggunakan dadu sebagai permainan. Dadu yang digunakan berbentuk bangun bersisi empat. Bentuk dadu sekarang dikenal beberapa waktu kemudian. Dadu yang kali pertama digunakan dalam permainan tersebut terbuat dari tulang rusa, sapi, atau kerbau.

At least as far back as 2000 BC, the rich and the mystical have had dice to play with. Very early dice were often in the shape of a tetrahedron. The modern cube shape came later. The first dice like objects to be used for games were made from the astralagus of deer, cow or oxen.

Sumber: *www.DrMath.com*

d. Kisaran Nilai Peluang

Di Kelas IX Anda telah mengetahui bahwa nilai peluang suatu percobaan adalah antara 0 dan 1 atau $0 \le P(x) \le 1$ dengan x adalah kejadian pada percobaan tersebut.

- Apabila $P(x) = 0$, kejadian x mustahil terjadi.
- Apabila $P(x) = 1$, kejadian x pasti terjadi.

Jadi, jika Anda mengetahui bahwa suatu kejadian kemungkinan kecil terjadi maka peluangnya mendekati nilai nol. Sebaliknya, jika peluang suatu kejadian yang kemungkinan besar dapat terjadi, peluangnya mendekati nilai 1.

Contoh 2.10

Tentukan peluang dari pernyataan-pernyataan berikut.

1. Ikan dapat hidup di darat.
2. Air mengalir dari tempat tinggi ke tempat rendah.
3. Lumut tumbuh di daerah gurun.
4. Muncul kartu as pada pengambilan seperangkat kartu remi.

Jawab:

1. Ikan hidup di darat merupakan suatu kemustahilan sehingga peluangnya sama dengan 0.
2. Air mengalir dari tempat tinggi ke tempat rendah merupakan suatu kepastian sehingga peluangnya sama dengan 1.
3. Lumut tumbuh di daerah gurun merupakan suatu kemustahilan sehingga peluangnya sama dengan 0.
4. Muncul kartu as pada kartu remi bukan merupakan suatu kemustahilan dan bukan pula suatu kepastian sehingga peluangnya di antara 0 dan 1, yaitu $\frac{1}{13}$.

2. Frekuensi Harapan

Anda telah mempelajari bahwa peluang muncul permukaan gambar pada pengetosan uang logam adalah $\frac{1}{2}$. Apabila pengetosan dilakukan 100 kali, harapan akan muncul permukaan angka adalah 50 kali atau setengah dari 100. Banyak muncul permukaan angka sebanyak 50 kali dari 100 kali pengetosan dinamakan frekuensi harapan.

Dari uraian tersebut, dapatkah Anda menyatakan pengertian frekuensi harapan suatu kejadian? Cobalah nyatakan pengertian frekuensi harapan suatu kejadian dengan kata-kata Anda sendiri.

Konsep yang telah Anda pelajari tersebut memperjelas definisi berikut.

Tokoh Matematika

Pierre de Fermat (1601–1665)

Pierre de Fermat adalah seorang hakim. Kemahiran matematikanya luar biasa memungkinkannya memberi sumbangan besar pada matematika tingkat tinggi, antara lain teori bilangan dan kalkulus diferensial. Ketika ia mengklaim bahwa ia telah membuktikan beberapa teorema matematika, ia selalu berkata benar. "Teorema Akhir Fermat" yang menyebabkan ia terkenal, akhirnya terbukti 300 tahun kemudian, yaitu pada tahun 1994 oleh Andrew Willes.

Sumber: *Finite Mathematics and its Application*, 1994

Definisi 2.11

Frekuensi harapan suatu kejadian ialah frekuensi yang diharapkan terjadinya kejadian tersebut selama *n* percobaan tersebut. Frekuensi harapan dirumuskan sebagai berikut.

$$f_H = n \times P(A)$$

Dalam hal ini, n : banyak percobaan

$P(A)$: peluang terjadinya kejadian A

Tantangan untuk Anda

1. Peluang seorang anak terjangkit penyakit demam berdarah adalah 0,087. Tentukan peluang seorang anak tidak terkena demam berdarah.
2. Dalam suatu percobaan diambil sebuah kartu secara acak dari satu set kartu remi, kemudian mengembalikannya (satu set kartu remi terdiri atas 52 kartu). Tentukanlah frekuensi harapan yang terambil adalah kartu *jack* jika percobaan dilakukan 117 kali.
3. Dalam percobaan melempar dua keping logam secara bersamaan, tentukan frekuensi harapan muncul sedikitnya satu muka jika percobaan dilakukan 200 kali.

Contoh 2.11

1. Sebuah dadu ditos sebanyak 100 kali, tentukan
   a. harapan muncul mata dadu 5,
   b. harapan muncul mata dadu yang habis dibagi 3,
   c. harapan muncul mata dadu prima ganjil,
   d. harapan muncul mata dadu prima genap, dan
   e. harapan muncul mata dadu ganjil.

2. Di sebuah negara diketahui bahwa peluang orang dewasa yang terkena serangan jantung adalah 0,07 dan peluang terkena penyakit liver adalah 0,17. Jika sebanyak 25.000 orang dewasa di negara tersebut diperiksa, berapa orang dewasa terkena penyakit serangan jantung dan berapa orang yang terkena penyakit liver?

3. Dalam sebuah penelitian diperoleh data bahwa dari hasil penyilangan diperoleh hasil 1.000 bunga dengan warna yang berbeda dengan perbandingan 1 putih : 3 merah muda : 1 merah. Berapakah banyak bunga merah, merah muda, dan putih yang dihasilkan?

Jawab:

1. **a.** $f_H(\text{mata dadu } 5) = 100 \times \frac{1}{6} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3}$

   b. $f_H(\text{habis dibagi } 3) = 100 \times \frac{2}{6} = \frac{100}{3}$

   c. $f_H(\text{ prima ganjil}) = 100 \times \frac{2}{6} = \frac{100}{3}$

   d. $f_H(\text{ prima genap}) = 100 \times \frac{1}{6} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3}$

   e. $f_H(\text{ganjil}) = 100 \times \frac{3}{6} = 50$

2. $f_H(\text{orang terkena serangan jantung}) = 25.000 \times 0{,}07 = 1.750$
$f_H(\text{orang terkena penyakit liver}) = 25.000 \times 0{,}17 = 4.250$

3. Hasil yang diperoleh 1 : 3 : 1, maka banyaknya bunga yang diperoleh adalah

- bunga putih = $\frac{1}{5} \times 1.000 = 200$ bunga
- bunga merah muda = $\frac{3}{5} \times 1.000 = 600$ bunga
- bunga merah = $\frac{1}{5} \times 1.000 = 200$ bunga

Aktivitas Matematika

Sediakan sebuah dadu. Kemudian, bersama kelompok belajar Anda lemparkanlah ke atas (sambil diputar) dadu itu sebanyak 100 kali. Catatlah berapa kali muncul

a. mata dadu bilangan 5,
b. mata dadu bilangan yang habis dibagi 3,
c. mata dadu bilangan prima ganjil,
d. mata dadu bilangan prima genap, dan
e. mata dadu bilangan ganjil.

Coba Anda bandingkan dengan penyelesaian Contoh 2.11(1). Apa yang dapat Anda simpulkan? Presentasikan kesimpulan Anda di depan kelas.

Tes Kompetensi Subbab B

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Tentukan ruang sampel percobaan berikut.
   a. Pengetosan 3 keping uang logam sekaligus.
   b. Pengetosan dua keping uang logam dan sebuah dadu.
   c. Penelitian jenis kelamin tiga bayi.
   d. Penelitian warna kulit (putih, sawo matang, dan hitam) dari tiga orang.
   e. Penelitian golongan darah dari empat orang pasien (untuk memudahkan, golongan darah *AB* ditulis A_2).

2. Lima puluh dua kartu diberi angka 1, 2, ,3, 4, 5, ..., 52. Kemudian, diambil sebuah kartu secara acak. Tentukan peluang:
   a. terambil kartu berangka ganjil;
   b. terambil kartu berangka prima;
   c. terambil kartu berangka habis dibagi tiga;
   d. terambil kartu berangka kelipatan lima;
   e. terambil kartu berangka kelipatan dua dan tiga;
   f. terambil kartu berangka memiliki 4 faktor.

3. Di suatu daerah, peluang bayi terkena polio adalah 0,03 dan peluang terkena campak adalah 0,05. Jika 1.500 bayi di daerah itu diperiksa, berapakah:
   a. bayi yang terkena polio;
   b. bayi yang tidak terkena polio;
   c. bayi yang terkena campak;
   d. bayi yang tidak terkena campak?

C. Kejadian Majemuk

Misalkan, pada sebuah kotak terdapat 2 bola merah dan 3 bola hijau. Dari kotak tersebut, Anda akan mengambil 1 buah bola merah dan 1 buah bola hijau. Kejadian terambilnya 1 buah bola merah dan 1 buah bola hijau dinamakan *kejadian majemuk*.

Situs Matematika

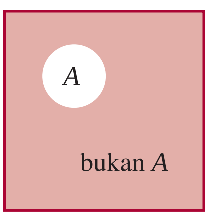
Anda dapat mengetahui informasi lain tentang Peluang melalui internet dengan mengunjungi situs berikut.
http://mathword.wolfram.com

1. Peluang Komplemen Suatu Kejadian

Diketahui, A adalah kejadian pada sebuah ruang sampel, sedangkan A' adalah kejadian bukan A yang juga terdapat pada ruang sampel tersebut.

Kejadian bukan A atau A' dinamakan juga *komplemen kejadian A*. Peluang kejadian A dilambangkan dengan $P(A)$, dan peluang komplemen kejadian bukan A dilambangkan dengan $P(\text{bukan } A)$ atau $P(A')$.

Amati diagram Venn pada Gambar 2.11. Gambar 2.11 menunjukkan ruang sampel yang terdiri atas kejadian A dan kejadian bukan A. Peluang ruang sampel sama dengan 1 sehingga



Gambar 2.11

$$\boxed{\begin{gathered} P(A) + P(\text{bukan } A) = 1 \\ \text{atau} \\ P(\text{bukan } A) = 1 - P(A) \end{gathered}}$$

Contoh 2.12

Tentukan peluang komplemen dari peluang berikut.

a. Peluang kereta datang terlambat adalah 0,03.

b. Peluang Indra meraih juara kelas adalah 0,25.

Jawab:

a. Komplemen kejadian kereta api datang terlambat adalah kejadian kereta api datang tepat waktu. Peluang kereta api datang tepat waktu adalah $(1 - 0{,}03) = 0{,}97$.

b. Peluang gagal menjadi juara kelas adalah $(1 - 0{,}25) = 0{,}75$.

2. Peluang Gabungan Dua Kejadian yang Saling Lepas

Sebuah dadu seimbang dilempar ke atas. Misalkan, A adalah kejadian (kejadian) muncul dadu bermata ganjil dan B adalah kejadian muncul mata dadu genap. Kejadian A dan B merupakan kejadian *saling lepas* sebab irisan dari dua kejadian tersebut adalah himpunan kosong.

Diketahui, himpunan A melambangkan kejadian A dan himpunan B melambangkan kejadian B. Apabila $P(A)$ dan $P(B)$ setiap peluang kejadian A dan kejadian B yang saling lepas, peluang gabungan 2 kejadian tersebut yang dinyatakan oleh $P(A \cup B)$ adalah $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Oleh karena $A \cap B = \emptyset$ maka tentunya $P(A \cap B) = 0$ sehingga

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Artinya, pada dua kejadian A dan kejadian B yang *saling lepas*, peluang terjadinya kejadian A atau kejadian B adalah penjumlahan peluang dua kejadian tersebut.

Contoh 2.13

1. Pada percobaan mengocok sebuah kartu remi, misalkan kejadian A adalah muncul kartu berwarna merah dan kejadian B adalah kejadian muncul kartu berwarna hitam. Apakah kejadian A dan B saling lepas?
2. Pada percobaan melempar sebuah dadu dan satu keping uang logam, tentukan peluang munculnya:
   a. mata dadu < 3 atau angka;
   b. mata dadu prima genap atau gambar;

Jawab:

1. Pada kartu remi terdapat 52 kartu. Banyak kartu merah dan hitam masing-masing 26 kartu. Muncul kartu merah terlepas dari muncul kartu hitam. Jadi, kejadian A dan B saling lepas.
2. **a.** Ruang sampel pelemparan dadu = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
   Misalkan, A = kejadian muncul dadu < 3 sehingga $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
   Ruang sampel pelemparan satu keping uang logam = $\{A, G\}$.
   Misalkan, B = kejadian muncul angka sehingga
   $P(B) = \frac{1}{2}$
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{5}{6}.$$
   b. A = kejadian muncul mata dadu prima genap sehingga
   $P(A) = \frac{1}{6}$.
   B = kejadian muncul gambar sehingga $P(B) = \frac{1}{2}$.
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Tugas

Bersama kelompok belajar Anda, buatlah tiga contoh dua kejadian yang saling lepas dalam kehidupan sehari-hari. Kemudian, jelaskan (presentasikan) di depan kelas mengapa contoh yang Anda buat merupakan dua kejadian yang saling lepas.

Ingatlah

A dan B saling lepas
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
A dan B tidak saling lepas
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Tantangan untuk Anda

Tiga puluh kartu diberi nomor 1, 2, 3, ..., 30. Kartu dikocok, kemudian diambil secara acak. Tentukan:

a. peluang kartu yang terambil adalah kartu yang bernomor bukan kelipatan 3,
b. peluang kartu yang terambil adalah kartu yang bernomor bukan kelipatan 3 dan 5, dan
c. peluang kartu yang terambil adalah kartu yang bernomor bukan kelipatan 6.

Contoh 2.14

Dua puluh buah kartu diberi nomor 1 sampai 20. Kemudian, dikocok dan diambil secara acak. Tentukanlah peluang dari:

a. kartu yang terambil nomor bilangan genap atau nomor 6;

b. kartu yang terambil nomor bilangan ganjil atau nomor 15;

Jawab:

a.
- Peluang terambil kartu nomor bilangan genap adalah $P(\text{genap}) = \frac{10}{20}$.
- Peluang terambil kartu nomor bilangan kelipatan 6 adalah $P(\text{kelipatan } 6) = \frac{3}{20}$.

Jadi, peluang terambil kartu nomor bilangan genap atau nomor bilangan kelipatan 6 adalah

$P(\text{genap atau kelipatan } 6) = P(\text{genap}) + P(\text{kelipatan } 6)$

$$= \frac{10}{20} + \frac{3}{20} = \frac{13}{20}$$

b.
- Peluang terambil kartu nomor bilangan ganjil adalah $P(\text{ganjil}) = \frac{10}{20}$.
- Peluang terambil kartu nomor 15 adalah $P(15) = \frac{1}{20}$.

Jadi, peluang terambil kartu nomor bilangan ganjil atau nomor 15 adalah $P(\text{ganjil atau } 15) = P(\text{ganjil}) + P(15)$

$$= \frac{10}{20} + \frac{3}{20} = \frac{13}{20}.$$

Pembahasan Soal

Suatu kelas terdiri atas 40 siswa, 25 siswa gemar matematika, 21 siswa gemar IPA, dan 9 siswa gemar matematika dan IPA. Peluang seorang tidak gemar matematika maupun IPA adalah ....

Jawab:

$n(S) = 40$; $n(M) = 25$; $n(I) = 21$; $n(M \cap I) = 9$

$n(M \cup I) = n(M) + n(I) - n(M \cap I)$
$= 25 + 21 - 9 = 37$

$P(M \cup I)' = 1 - P(M \cup I)$

$$= 1 - \frac{n(M \cup I)}{n(s)}$$

$$= 1 - \frac{37}{40} = \frac{3}{40}$$

Soal Ebtanas 2000

3. Peluang Dua Kejadian yang Saling Bebas

a. Kejadian Melempar Dua Mata Uang secara Bersamaan

Dalam pelemparan dua keping uang logam secara serempak, apabila G_1 adalah kejadian muncul permukaan gambar pada pengetosan mata uang pertama maka kejadian muncul permukaan gambar ataupun permukaan angka pada mata uang kedua tidak dipengaruhi oleh G_1. Begitu pula apabila A_1 menyatakan kejadian muncul permukaan angka pada mata uang pertama maka muncul permukaan gambar ataupun permukaan angka pada mata uang kedua tidak akan dipengaruhi oleh A_1.

Kejadian pelemparan dua mata uang secara bersamaan dinamakan *dua kejadian yang saling bebas*.

Tantangan untuk Anda

1. Sebuah kartu diambil secara acak dari satu set kartu remi. Tentukan peluang yang terambil, kartu hitam atau king.
2. Sebuah dadu merah dan dadu putih dilemparkan bersamaan. Tentukan peluang muncul mata dadu berjumlah 6 atau berjumlah kelipatan 5.

Misalkan, G_2 adalah kejadian muncul permukaan gambar pada mata uang kedua dan A_2 adalah kejadian muncul permukaan angka pada mata uang kedua sehingga ruang sampel untuk pelemparan dua buah mata uang logam adalah $\{(A_1, A_2), (A_1, G_2), (G_1, A_2), (G_1, G_2)\}$.

Peluang muncul permukaan gambar pada mata uang pertama sama dengan peluang muncul permukaan gambar pada mata uang kedua sehingga $P(G_1) = P(G_2) = \frac{1}{2}$.

Peluang munculnya permukaan angka pada mata uang pertama sama dengan peluang munculnya permukaan angka pada mata uang kedua sehingga $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$.

Peluang munculnya A_1 dan munculnya A_2

$= P(A_1 \text{ dan } A_2) = P(A_1 \cap A_2)$

$= P(A_1) \times P(A_2)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Jadi, $P(A_1 \text{ dan } A_2) = P(A_1) \times P(A_2) = \frac{1}{4}$.

Dengan cara yang sama, coba Anda tunjukkan:

$P(A_1 \text{ dan } G_2) = P(A_1) \times P(G_2) = \frac{1}{4}$

$P(G_1 \text{ dan } A_2) = P(G_1) \times P(A_2) = \frac{1}{4}$

$P(G_1 \text{ dan } G_2) = P(G_1) \times P(G_2) = \frac{1}{4}$

b. Kejadian Mengambil Bola dari Dalam Sebuah Tas

Sebuah kotak berisi 5 bola hijau dan 7 bola biru. Anda ingin mengambil dua bola secara bergantian dengan pengembalian. Misalkan, pada pengambilan pertama diperoleh bola hijau, kemudian bola itu dikembalikan lagi ke dalam kotak. Pada pengambilan kedua diperoleh bola biru. Kedua kejadian pengambilan bola tersebut dinamakan *dua kejadian yang saling bebas stokastik* karena pengambilan bola pertama tidak mempengaruhi pengambilan bola kedua. Ruang sampel kejadian pengambilan bola tersebut adalah sebagai berikut.

- Pengambilan bola pertama, ruang sampelnya: {hijau, biru} $P(\text{hijau}) = \frac{5}{12}$ dan $P(\text{biru}) = \frac{7}{12}$.
- Pengambilan kedua (dengan pengembalian), ruang sampelnya: {(hijau dan hijau), (hijau dan biru), (biru dan hijau), (biru dan biru)}.

Ingatlah

Dua kejadian yang saling bergantung dinamakan juga dengan kejadian bersyarat.

$$P(\text{hijau dan hijau}) = P(\text{hijau}) \times P(\text{hijau}) = \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{25}{144}$$

$$P(\text{hijau dan biru}) = P(\text{hijau}) \times P(\text{biru}) = \frac{5}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{35}{144}$$

$$P(\text{biru dan hijau}) = P(\text{biru}) \times P(\text{hijau}) = \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{35}{144}$$

$$P(\text{biru dan biru}) = P(\text{biru}) \times P(\text{biru}) = \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{49}{144}$$

Uraian yang telah anda pelajari tersebut memperjelas rumus berikut

Jika dua kejadian *A* dan *B* saling bebas stokastik maka peluang terjadinya kedua kejadian tersebut secara bersamaan, yang dinyatakan oleh *P* (*A* ∩ *B*) adalah

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

Contoh 2.15

1. Sebuah kotak berisi 11 bola yang diberi nomor 1 hingga 11. Dua bola diambil dari kotak secara bergantian dengan pengembalian. Tentukanlah peluang terambil bola-bola tersebut bernomor bilangan
   a. kelipatan 4 dan nomor 9;
   b. ganjil dan genap.
2. Sebuah kotak berisi 11 bola yang bernomor 1 sampai dengan 11. Dua bola diambil dari kotak secara bergantian tanpa pengembalian. Tentukanlah peluang terambilnya bola-bola tersebut bernomor bilangan berikut ini.
   a. Genap, kemudian ganjil.
   b. Ganjil, kemudian genap.
   c. Kelipatan 3, kemudian nomor 8.

Jawab:

1. a. Peluang terambil bola bernomor kelipatan 4 adalah P (kelipatan 4) = $\frac{2}{11}$, peluang bola bernomor 9 adalah $P(9) = \frac{1}{11}$.

   Jadi, P (kelipatan 4 dan nomor 9)
   $= P$ (kelipatan 4) × $P(9) = \frac{2}{11} \times \frac{1}{11} = \frac{2}{121}$.

   b. Peluang bola bernomor bilangan ganjil adalah P (ganjil) = $\frac{6}{11}$, peluang bola bernomor bilangan genap adalah $P(\text{genap}) = \frac{5}{11}$.

Tantangan untuk Anda

Penerbangan dari bandara Soekarno-Hatta telah terjadwal teratur. Peluang berangkat tepat waktu adalah 0,80. Peluang sampai tepat waktu adalah 0,75. Adapun peluang berangkat dan sampai tepat waktu adalah 0,70. Tentukan:

a. peluang pesawat sampai tepat waktu jika diketahui berangkat tepat waktu;
b. peluang berangkat tepat waktu jika diketahui sampai tepat waktu.

Jadi, peluang bola bernomor ganjil dan genap adalah
P(ganjil dan genap) = P(ganjil) × P(genap)

$$= \frac{6}{11} \times \frac{5}{11} = \frac{30}{121}.$$

2. a. Peluang bola bernomor bilangan genap adalah

$P(\text{genap}) = \frac{5}{11}$.

Mengingat pengambilan dilakukan tanpa pengembalian, jumlah bola di dalam kotak tinggal 10 buah. Peluang terambil bola bernomor bilangan ganjil adalah $P(\text{ganjil} \mid \text{genap}) = \frac{6}{10}$. Jadi, P(bola bernomor bilangan genap kemudian ganjil) adalah

$$P(\text{genap}) \times P(\text{ganjil} \mid \text{genap}) = \frac{5}{11} \times \frac{6}{10} = \frac{30}{110} = \frac{6}{22}.$$

b. Peluang bola bernomor kelipatan 3 adalah

$P(\text{kelipatan } 3) = \frac{3}{11}$.

Mengingat pengambilan dilakukan tanpa pengembalian, jumlah bola yang tersedia di dalam kotak tinggal 10 buah. Peluang terambil bola bernomor 8 adalah

$P(8 \mid \text{kelipatan } 3) = \frac{1}{10}$.

Jadi, P (kelipatan 3 kemudian nomor 8) adalah

$$P\ (\text{kelipatan } 3) \times P\ (8 \mid \text{kelipatan } 3) = \frac{3}{11} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{110}.$$

c. Peluang bola bernomor kelipatan 4 adalah $P(\text{kelipatan } 4) = \frac{2}{11}$. Mengingat pengambilan dilakukan tanpa pengembalian, jumlah bola yang tersedia dalam kotak tinggal 10 buah.

Peluang terambil bola bernomor 11 adalah $P(11 \mid \text{kelipatan } 4) = \frac{1}{10}$. Jadi, P(kelipatan 4 kemudian 11) adalah

$$P(\text{ kelipatan } 4) \times P(11 \mid \text{kelipatan} 4) = \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{110} = \frac{1}{55}.$$

Mari, Cari Tahu

Bersama tujuh orang teman, buatlah poster ilmuwan yang berjasa dalam mengembangkan materi peluang, seperti Pierre de Fermat dan Blaise Pascal. Carilah ilmuwan lainnya. Tempelkan hasilnya di ruangan kelas Anda.

Hal Penting

- faktorial
- permutasi
- kombinasi
- peluang
- ruang sampel
- kejadian majemuk

Tes Kompetensi Subbab C

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Tentukan peluang komplemen dari kejadian berikut.
   a. Peluang hari ini hujan $\frac{2}{5}$.
   b. Peluang pengguna narkotika terinfeksi HIV 0,98.
   c. Peluang muncul mata dadu angka kurang dari 5 dari pengetosan sebuah dadu adalah $\frac{2}{3}$.
   d. Peluang bayi yang baru lahir hidup adalah 75%.
   e. Peluang kesebelasan A memenangkan pertandingan adalah 63%.
   f. Peluang bukan perokok terkena penyakit jantung adalah 0,025.
2. Pada pengetosan dua buah dadu berwarna merah dan putih, tentukanlah peluang muncul jumlah mata dadu sama dengan
   a. 3 atau 5,
   b. 3 atau 6,
   c. 4 atau 7,
   d. 4 atau 10,
   e. 5 atau 6,
   f. 6 atau 8.
3. Dari seperangkat kartu remi diambil sebuah kartu secara acak. Tentukan peluang dari kartu yang terambil kartu
   a. as atau *king*,
   b. as hati atau *queen* merah,
   c. kartu bernomor 10 atau jantung,
   d. kartu bernomor kelipatan 5 atau bernomor 9,
   e. kartu bernomor kelipatan 2 atau kartu sekop,
   f. kartu jantung atau kartu bergambar.
4. Pada pengetosan dua buah dadu, tentukan peluang untuk memperoleh
   a. angka ganjil pada dadu pertama dan angka genap pada dadu kedua,
   b. angka kurang dari 4 pada dadu pertama dan angka lebih dari 4 pada dadu ke dua,
   c. angka kelipatan dua pada dadu pertama dan angka prima ganjil pada dadu kedua, dan
   d. angka prima genap pada dadu pertama dan angka kelipatan 3 pada dadu kedua.
5. Tiga orang pasien penyakit tumor, usus buntu, dan hernia akan dioperasi. Peluang ketiga pasien itu tertolong adalah sebagai berikut.
   Peluang pasien tumor tertolong adalah $P(T) = \frac{2}{17}$.
   Peluang pasien usus buntu tertolong adalah $P(B) = \frac{10}{17}$.
   Peluang pasien hernia tertolong adalah $P(H) = \frac{14}{17}$. Tentukan peluang dari:
   a. ketiga pasien akan tertolong;
   b. ketiga pasien tidak akan tertolong;
   c. pasien hernia tertolong, tetapi pasien tumor dan usus buntu tidak tertolong;
   d. pasien usus buntu dan hernia tertolong, tetapi pasien tumor tidak tertolong;
   e. pasien tumor tertolong, tetapi pasien usus buntu dan hernia tidak tertolong;
   f. pasien tumor dan usus buntu tertolong, tetapi pasien hernia tidak tertolong.
6. Sebuah kotak berisi lima belas kartu bernomor 1 sampai dengan 15. Tiga lembar kartu diambil acak secara bergantian tanpa pengembalian. Tentukan peluang kartu-kartu tersebut bernomor bilangan berikut.
   a. Kelipatan 4, kelipatan 5, kemudian kelipatan 7.
   b. Nomor ganjil, genap kurang dari 5, kemudian kelipatan 6.
   c. Nomor genap, prima ganjil kemudian kelipatan 9.
7. Misalkan, peluang seorang laki-laki dapat hidup sampai 60 tahun adalah 0,75 dan perempuan dapat hidup sampai 60 tahun peluangnya 0,70. Berapa peluang kedua orang itu dapat hidup sampai 60 tahun?

8. Dalam sebuah kotak terdapat 7 kelereng merah, 4 kelereng biru, dan 5 kelereng kuning. Kelereng tersebut diambil secara acak.
   a. Tentukan peluang terambilnya kelereng merah atau bukan biru.
   b. Jika dilakukan tiga kali pengambilan secara berurutan tanpa pengembalian, tentukan peluang terambilnya berturut-turut kelereng merah, biru, kemudian kuning.
9. Sebuah kantong berisi 18 kelereng merah, 12 kelereng kuning, dan 8 kelereng biru. Sebuah kelereng diambil secara acak dari kantong. Tentukan peluang terambil kelereng merah atau kuning.

Rangkuman

- Permutasi adalah susunan dari semua atau sebagian elemen suatu himpunan yang mementingkan urutannya.
- Kombinasi adalah susunan dari semua atau sebagian elemen suatu himpunan tidak mementingkan urutannya.
- Frekuensi harapan suatu kejadian ialah harapan *banyaknya kejadian* yang dapat terjadi dari banyak percobaan yang dilakukan. Frekuensi harapan dirumuskan

$$f_H = n \times P(A)$$

  Dalam hal ini n : banyak percobaan
  $P(A)$: peluang terjadinya kejadian A

Sekarang, lanjutkanlah rangkuman di atas.

Refleksi

Setelah Anda mempelajari Bab 2,
1. tuliskanlah materi mana yang menurut Anda sulit dan yang mudah,
2. bagian manakah yang menurut Anda sangat menarik dan penting untuk dipelajari.

Tes Kompetensi Bab 2

A. Pilihlah salah satu jawaban dan berikan alasannya.

1. Dari angka 3, 5, 6, 7, dan 9 dibuat bilangan yang terdiri atas tiga angka yang berbeda. Di antara bilangan-bilangan tersebut yang kurang dari 400 banyaknya adalah ....
   a. 16
   b. 12
   c. 10
   d. 8
   e. 6
2. Dua buah dadu ditos sekali. Peluang kedua mata dadu berjumlah bilangan prima adalah ....
   a. $\frac{7}{18}$
   b. $\frac{5}{11}$
   c. $\frac{5}{12}$
   d. $\frac{4}{11}$
   e. $\frac{1}{2}$
3. Sebuah dadu dan sekeping logam ditos bersama-sama. Peluang dadu menunjukkan angka genap dan uang menunjukkan angka adalah ....
   a. $\frac{1}{2}$
   b. $\frac{1}{3}$
   c. $\frac{1}{4}$
   d. $\frac{1}{6}$
   e. $\frac{1}{12}$
4. Pada pengetosan dua buah dadu, peluang munculnya mata dadu berjumlah kurang dari delapan adalah ....
   a. $\frac{5}{36}$
   b. $\frac{7}{12}$
   c. $\frac{5}{6}$
   d. $\frac{5}{12}$
   e. $\frac{8}{12}$
5. Jika C_r^n menyatakan banyaknya kombinasi r elemen dari n elemen dan $C_3^n = 2n$ maka $C_7^{2n} = ...$
   a. 16
   b. 12
   c. 11
   d. 9
   e. 8
6. Tiga keping uang logam ditos sebanyak 208 kali. Frekuensi harapan munculnya minimal dua sisi gambar adalah ....
   a. 156
   b. 130
   c. 104
   d. 72
   e. 52
7. Tiga orang siswa masuk ruangan rapat. Tempat yang masih kosong 5 kursi. Banyaknya cara mereka dapat mengambil tempat duduk adalah ....
   a. 72
   b. 60
   c. 48
   d. 24
   e. 18
8. Peluang pada pengetosan 7 mata uang sekaligus yang muncul 3 gambar adalah ....
   a. $\frac{17}{128}$
   b. $\frac{19}{128}$
   c. $\frac{27}{128}$
   d. $\frac{31}{128}$
   e. $\frac{35}{128}$
9. Jika $P(n + 4,11) : P(n + 3,11) = 14 : 3$ maka $n = ...$
   a. 12
   b. 11
   c. 10
   d. 9
   e. 8
10. Koefisien x^{17} dari $x^5(1 - x^2)^{17}$ adalah ....
    a. 12.376
    b. –924
    c. –12.376
    d. –6188
    e. 924
11. Dua buah dadu dilempar undi bersama-sama. Peluang munculnya jumlah mata dadu 9 atau 10 adalah ....
    a. $\frac{5}{36}$
    b. $\frac{7}{36}$
    c. $\frac{8}{36}$
    d. $\frac{9}{36}$
    e. $\frac{11}{36}$

12. Tono beserta 9 orang temannya bermaksud membentuk suatu tim bola volley terdiri atas 6 orang. Apabila Tono harus menjadi anggota tim tersebut maka banyak tim yang mungkin dibentuk adalah ....

a. 126 **d**. 216
b. 162 **e**. 252
c. 210

13. Tiga buah kelereng merah dan empat buah kelereng putih yang identik dimasukkan ke dalam sebuah kotak. Peluang terambilnya sebuah kelereng merah dan dua buah kelereng putih dalam sekali pengambilan adalah ....

a. $\frac{5}{35}$ **d**. $\frac{24}{35}$
b. $\frac{12}{35}$ **e**. $\frac{30}{35}$
c. $\frac{18}{35}$

14. Dua buah dadu ditos bersama. Peluang munculnya jumlah mata dadu tiga atau enam adalah ....

a. $\frac{12}{36}$ **d**. $\frac{1}{36}$
b. $\frac{8}{36}$ **e**. $\frac{5}{36}$
c. $\frac{7}{36}$

15. Peluang seorang pemain basket memasukkan bola ke dalam keranjang dengan tepat adalah 0,2. Tentukan peluang pemain basket tersebut memasukkan paling sedikit sekali dari dua kali percobaan ....

a. $\frac{4}{100}$ **d**. $\frac{96}{100}$
b. $\frac{2}{10}$ **e**. $\frac{2}{100}$
c. $\frac{4}{10}$

16. Diketahui bahwa 20% siswa sebuah sekolah dasar bercita-cita ingin menjadi dokter, 50% siswa bercita-cita menjadi pilot, dan 10% siswa bercita-cita menjadi dokter dan pilot. Jumlah siswa yang bercita-cita menjadi dokter atau pilot adalah ....

a. 20% **d**. 50%
b. 30% **e**. 60%
c. 40%

17. Pelat nomor mobil angkutan umum di suatu kota terdiri atas tiga huruf dan dua angka. Banyaknya cara menyusun pelat nomor tersebut jika tidak boleh ada huruf atau pun angka yang berulang adalah ....

a. 26 × 26 × 26 × 9 × 9 cara
b. 26 × 25 × 24 × 9 × 8 cara
c. 26 × 25 × 9 × 8 × 7 cara
d. 26 × 25 × 24 × 10 × 9 cara
e. 26 × 25 × 10 × 9 × 8 cara

18. Peluang seorang siswa mendapat nilai baik dalam mata pelajaran Matematika dan Fisika berturut-turut adalah 0,2 dan 0,4. Peluang siswa tersebut mendapat nilai baik untuk salah satu mata pelajaran tersebut adalah ....

a. 0,92 **d**. 0,8
b. 0,08 **e**. 0,6
c. 0,85

19. Peluang seorang anak menebak dengan tepat huruf pertama nama temannya adalah ....

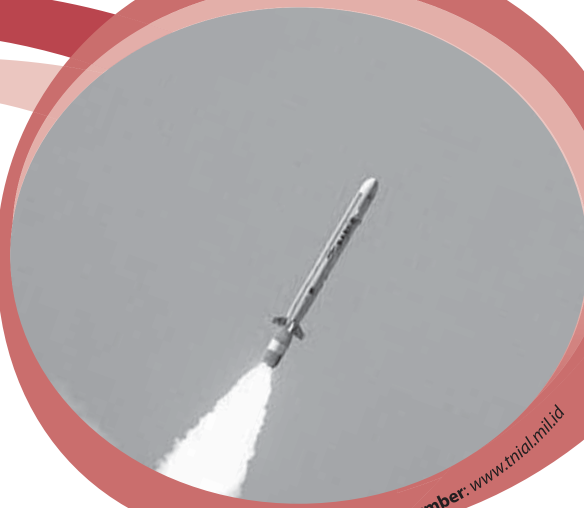
a. $\frac{1}{13}$ **d**. $\frac{2}{52}$
b. $\frac{1}{26}$ **e**. $\frac{2}{26}$
c. $\frac{1}{25}$

20. Peluang untuk memperoleh bilangan ganjil pada sebuah dadu dan gambar pada sekeping mata uang yang dilempar bersama sebanyak satu kali adalah ....

a. $\frac{1}{12}$ **d**. $\frac{1}{3}$
b. $\frac{1}{6}$ **e**. $\frac{1}{2}$
c. $\frac{1}{4}$

B. Jawablah dengan singkat, tepat, dan jelas.

1. Dalam satu keranjang terdapat 9 buah tomat. Jika diambil tiga buah tomat secara acak dari empat buah tomat berwarna merah, tiga buah tomat berwarna hijau kemerahan, dan tiga buah tomat yang masih hijau. Tentukan banyaknya cara yang dapat dilakukan.
2. Dari 36 orang siswa terdapat 22 orang gemar voli, 17 orang gemar tenis, dan 4 orang tidak gemar keduanya. Jika seorang siswa dipilih secara acak, berapa peluang:
   a. seorang gemar olahraga voli;
   b. seorang siswa gemar olahraga tenis;
   c. seorang siswa hanya gemar olahraga voli;
   d. seorang siswa hanya gemar olahraga tenis;
   e. seorang siswa gemar olahraga voli dan tenis.
3. Tiga orang perempuan harus duduk di antara empat orang pria. Tidak ada perempuan yang duduk di pinggir dan tidak ada perempuan yang duduk berdampingan dengan perempuan. Dalam berapa cara kondisi tersebut dapat diatur?
4. Jabarkan dan sederhanakan bentuk-bentuk berikut.
   a. $(3a + b^2)^4$
   b. $(2p + q^2)^5$
   c. $(3p^2 - q)^5$
   d. $(2x^2 - 3y)^6$
   e. $(3a^2 - 2ab)^6$
   f. $(a + 2b - 3c)^7$
5. Satu stoples berisi 16 permen rasa cokelat dan 12 permen rasa jeruk. Jika diambil dua permen satu per satu tanpa pengembalian, tentukan peluang yang terambil itu adalah
   a. keduanya rasa cokelat,
   b. keduanya rasa jeruk,
   c. pengambilan pertama rasa cokelat dan pengambilan kedua rasa jeruk,
   d. berturut-turut rasa jeruk, kemudian rasa cokelat.



Bab 3

Trigonometri

Setelah mempelajari bab ini, Anda harus mampu menggunakan rumus trigonometri jumlah dua sudut, selisih dua sudut, dan sudut ganda; merancang rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut dan sudut ganda.

Anda telah mempelajari perbandingan trigonometri dari sudut berelasi di Kelas X. Pada bab ini, materi itu akan dikembangkan sampai ke rumus trigonometri untuk jumlah dan selisih dua sudut. Lebih lanjut, pada bab ini akan dibahas mengenai rumus trigonometri untuk sudut rangkap.

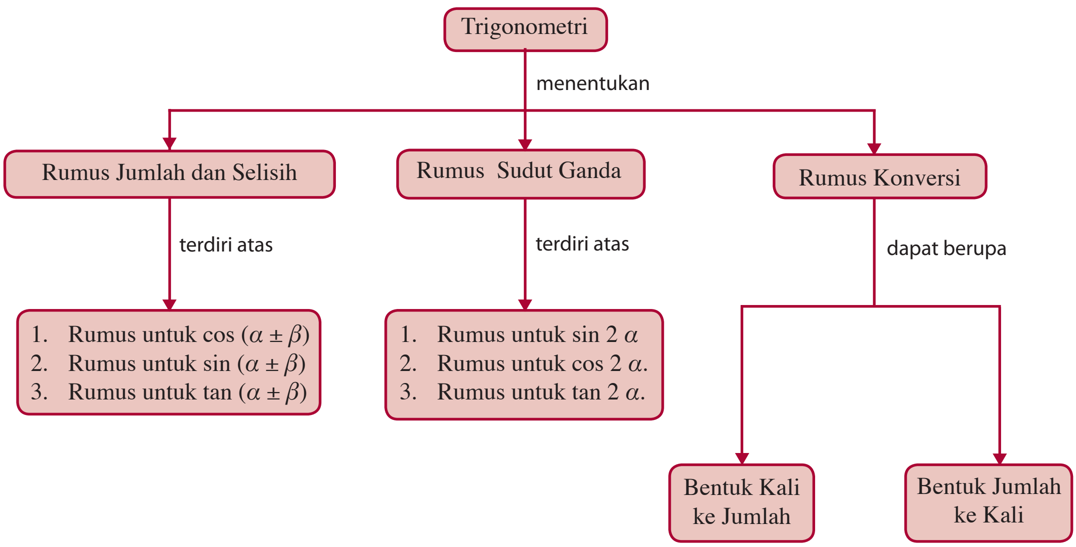
Konsep-konsep trigonometri yang akan dibahas di bab ini sangat penting peranannya dalam ilmu pengetahuan dan teknologi, misalnya dalam menjawab permasalahan berikut.

Sebuah roket yang ditembakkan ke atas membentuk sudut θ terhadap arah horizontal. Berapakah besar sudut θ agar roket mencapai jarak maksimum?

Agar Anda dapat menjawab permasalahan tersebut, pelajari bab ini dengan baik.

Diagram Alur

Untuk mempermudah Anda dalam mempelajari bab ini, pelajarilah diagram alur yang disajikan sebagai berikut.



Tes Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Isilah titik-titik berikut.

a. $\cos^2 a = 1 - ....$

b. $\tan \alpha = \frac{....}{....}$

c. $\sin(180^\circ - A) = ...$

d. $\cos(90^\circ - A) = ...$

e. $\sin(-\alpha) = ...\ \sin \alpha$

f. $\cos(-\beta) = ...\cos \beta$

g. $\cos(90^\circ - \beta) = ...$

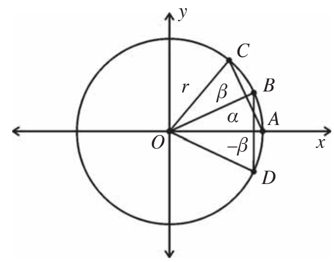
h. $\tan(-\beta) = ...\tan$

2. Tentukan jarak antara titik $A(1, -2)$ dan $B(4,2)$.

A. Rumus Trigonometri untuk Jumlah dan Selisih Dua Sudut

1. Rumus untuk Cos ($\alpha \pm \beta$)

Amati gambar Gambar 3.1 dengan saksama. Gambar 3.1 menunjukkan lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari r. Amati lagi gambar tersebut dengan saksama. Dari gambar tersebut, diperoleh $OC = OB = OD = OA = r$ dan koordinat titik A, titik B, titik C, dan titik D, yaitu $A(r, 0)$, $B(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$, $C(r \cos(\alpha + \beta), r \sin(\alpha + \beta))$, dan $D(r \cos \beta, -r \sin \beta)$.



Gambar 3.1

Dengan menggunakan rumus jarak antara dua titik, diperoleh

$$d_{AB}^2 = (AB)^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

sehingga Anda dapat menentukan $(AC)^2$ dan $(DB)^2$, yaitu

a. $(AC)^2 = [r \cos(\alpha + \beta) - r]^2 + [r \sin(\alpha + \beta) - 0]^2$

$= r^2 \cos^2(\alpha + \beta) - 2r^2\cos(\alpha + \beta) + r^2 + r^2 \sin^2(\alpha + \beta)$

$= r^2 [\cos^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha + \beta)] + r^2 - 2r^2\cos(\alpha + \beta)$

$= r^2 \cdot 1 + r^2 - 2r^2 \cos(\alpha + \beta) = 2r^2 - 2r^2 \cos(\alpha + \beta)$

Jadi, $(AC)^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos(\propto + \beta)$

b. $(DB)^2 = (r \cos \alpha - r \cos \beta)^2 + (r \sin \alpha + r \sin \beta)^2$

$= r^2 \cos^2 \alpha - 2r^2 \cos \alpha \cos \beta + r^2 \cos^2 \beta + r^2 \sin^2 \alpha + 2 r^2\sin \alpha \sin \beta + r^2 \sin^2 \beta$

$= r^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + r^2 (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) - 2r^2 \cos \alpha \cos \beta + 2r^2 \sin \alpha \sin \beta$

$= r^2 + r^2 - 2r^2 \cos \alpha \cos \beta + 2r^2 \sin \alpha \sin \beta$

$= \mathbf{2r^2 - 2r^2 \cos \alpha \cos \beta + 2r^2 \sin \alpha \sin \beta}$

Jadi, $(DB)^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos \propto \cos \beta + 2r^2 \sin\propto \sin \beta$

ΔOCA kongruen dengan ΔOBD sehingga $AC = DB$. Coba Anda kemukakan alasan mengapa ΔOCA kongruen ΔOBD.

Jadi, $AC^2 = DB^2$.

$2r^2 - 2r^2 \cos(\alpha + \beta) = 2r^2 - 2r^2 \cos \alpha \cos \beta + 2r^2 \sin \alpha \sin \beta$

$-2r^2 \cos(\alpha + \beta) = -2r^2 \cos \alpha \cos \beta + 2r^2 \sin \alpha \sin \beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

Pembahasan Soal

Diketahui $\cos(A-B) = \frac{3}{5}$ dan $\cos A \cdot \cos B = \frac{7}{25}$. Tentukan nilai $\tan A \cdot \tan B$

Jawab:

$\cos(A-B) =$

$\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$

$\sin A \cdot \sin B =$

$\cos(A-B) - \cos A \cdot \cos B$

$= \frac{3}{5} - \frac{7}{25}$

$= \frac{15-7}{25} = \frac{8}{25}$

$$\tan A \cdot \tan B = \frac{\sin A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B} = \frac{\frac{8}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{8}{7}$$

Ebtanas 1998

Rumus untuk $\cos(\alpha - \beta)$ dapat diturunkan dari rumus $\cos(\alpha + \beta)$, yaitu

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) \\ &= \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

Contoh 3.1

1. Hitunglah cos 75°.
2. Buktikan $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = 1 - \tan\alpha\tan\beta$.

Jawab:

1. $\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30°$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

2. $$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$= 1 - \tan\alpha\tan\beta$$

2. Rumus untuk sin $(\alpha \pm \beta)$

Anda tentu masih ingat pelajaran di Kelas X tentang sudut komplemen. Anda dapat menentukan rumus $\sin(\alpha + \beta)$ dengan menggunakan rumus perbandingan trigonometri dua sudut komplemen berikut.

$$\boxed{\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha \text{ dan } \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha}$$

Dengan menggunakan rumus perbandingan trigonometri dua sudut komplemen, diperoleh

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos[90° - (\alpha+\beta)] \\ &= \cos[(90°-\alpha) - \beta] \\ &= \cos(90°-\alpha)\cos\beta + \sin(90°-\alpha)\sin\beta \\ &= \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta\end{aligned}$$

sehingga $\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$

Rumus $\sin(\alpha - \beta)$ dapat diperoleh dari rumus $\sin(\alpha + \beta)$, yaitu

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) \\ &= \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) \\ &= \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta\end{aligned}$$

Jadi, $\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$

Sekarang, coba jelaskan dengan kata-kata Anda sendiri rumus-rumus yang diberi kotak.

Contoh 3.2

1. Hitunglah sin 15°.
2. Hitunglah $\sin\left(\frac{1}{4}\pi+\theta\right)\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)+\cos\left(\frac{1}{4}\pi+\theta\right)\sin\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)$.

Jawab:

1. $\sin 15° = \sin(45°–30°) = \sin 45° \cos 30° – \cos 45° \sin 30°$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)-\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{4}\sqrt{2}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$$

2. Soal tersebut bentuknya sama dengan rumus $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$ dengan

$\alpha=\left(\frac{1}{4}\pi+\theta\right)$ dan $\beta=\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)$. Akibatnya,

$$\sin\left(\frac{1}{4}\pi+\theta\right)\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)+\cos\left(\frac{1}{4}\pi+\theta\right)\sin\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)$$

$$= \sin\left(\frac{1}{4}\pi+\theta\right)\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)+\cos\left(\frac{1}{4}\pi+\theta\right)\sin\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)$$

$$= \sin\frac{1}{2}\pi = 1$$

Dapatkah Anda mengerjakan dengan cara lain? Silakan coba.

3. Rumus untuk tan ($\alpha \pm \beta$)

Anda telah mempelajari bahwa

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Kemudian, Anda juga telah mempelajari bahwa

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \text{dan}\\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{array}}$$

Tantangan untuk Anda

1. Jelaskan mengapa rumus $\tan(t-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$ tidak bisa digunakan untuk menunjukkan $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$.
2. Perhatikan uraian berikut.

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{\tan\theta+\tan(\pi/2)}{1-\tan\theta\tan(\pi/2)}$$
$$=\frac{\frac{\tan\theta}{\tan(\pi/2)}+1}{\frac{\tan\theta}{\tan(\pi/2)}-\tan\theta}$$
$$=\frac{0+1}{0-\tan\theta}$$
$$=\frac{1}{-\tan\theta}$$
$$=-\cot\theta$$

Jelaskan alasan setiap langkah pada uraian tersebut.

Tantangan
untuk Anda

Jelaskan makna dari π jika dikatakan $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ dan $\pi = 3{,}14$

Sekarang, pelajari uraian berikut.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \times \frac{\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Jadi, $\boxed{\mathbf{tan}(\alpha+\beta) = \frac{\mathbf{tan}\alpha+\mathbf{tan}\beta}{1-\mathbf{tan}\alpha\cdot\mathbf{tan}\beta}}$

Rumus $\tan(\alpha - \beta)$ diperoleh dari rumus $\tan(\alpha + \beta)$, sebagai berikut:

$$\tan(\alpha-\beta) = \tan(\alpha+(-\beta)) = \frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$$

$$= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Jadi, $\boxed{\mathbf{tan}(\alpha-\beta) = \frac{\mathbf{tan}\alpha-\mathbf{tan}\beta}{1+\mathbf{tan}\alpha\cdot\mathbf{tan}\beta}}$

Contoh 3.3

1. Jika $\tan 5° = p$, tentukan $\tan 50°$.
2. Dalam segitiga lancip ABC, diketahui $\sin C = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Jika $\tan A \tan B = 13$ maka tentukan $\tan A + \tan B$.

Jawab:

1. $\tan 50° = \tan(45° + 5°) = \frac{\tan 45° + \tan 5°}{1 - \tan 45° \tan 5°}$

$$= \frac{1+p}{1-1\cdot p} = \frac{1+p}{1-p}$$

2. *Langkah ke-1*

Tuliskan apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan dari soal tersebut.

Diketahui:
- $\sin C = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$
- $\tan A \tan B = 13$
- ΔABC lancip.

Ditanyakan: Nilai ($\tan A + \tan B$).

Langkah ke-2

Menentukan konsep yang akan digunakan dalam menjawab soal. Pada soal ini, konsep yang digunakan adalah konsep sudut dalam suatu segitiga dan rumus trigonometri untuk jumlah dua sudut.

Langkah ke-3

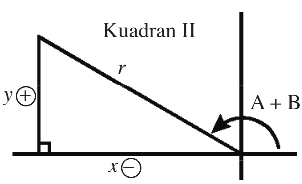
Menentukan nilai ($\tan A + \tan B$) dengan strategi yang telah diketahui. Sudut-sudut dalam ΔABC berjumlah 180° sehingga $A + B + C = 180°$.

$A + B + C = 180°$

$C = 180° - (A + B)$

$$\sin C = \sin(A + B) = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Karena ΔABC lancip maka $(A + B)$ terletak di kuadran II.



$$\sin (A + B) = \frac{y}{r} = \frac{2}{\sqrt{13}} \text{ sehingga } y = 2 \text{ dan } r = \sqrt{13}$$

$$x = -\sqrt{r^2 - y^2} = -\sqrt{13 - 4} = -3$$

$$\tan (A + B) = \frac{y}{x} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

$$\tan (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$-\frac{2}{3} = \frac{\tan A + \tan B}{1 - 13}$$

$$\tan A + \tan B = \frac{2(-12)}{-3} = 8$$

Tes Kompetensi Subbab A

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Jika $\cos 5° = p$, $\sin 5° = q$, dan $\tan 5° = r$, tentukan nilai dari
   - **a.** cos 25°
   - **b.** cos 80°
   - **c.** sin 40°
   - **d.** sin 95°
   - **e.** tan 55°
   - **f.** tan 10°

2. Tentukan nilai dari
   - **a.** cos 80° cos 55° – sin 80° sin 55°
   - **b.** cos 350° cos 20° + sin 350° sin 20°
   - **c.** sin 250° cos 25° – cos 250° sin 25°
   - **d.** $\dfrac{\tan 85° + \tan 35°}{1 - \tan 85° \tan 35°}$

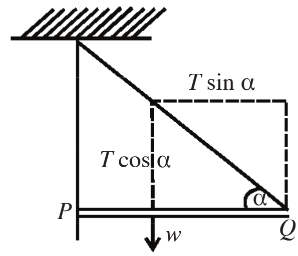
e. $\dfrac{\tan 390^\circ + \tan 75^\circ}{1 + \tan 390^\circ \tan 75^\circ}$

3. Buktikan bahwa
   a. $\cos (60° – b) – \cos (60° + b) = \sqrt{3} \sin b$
   b. $\sin (a + 45°) + \sin (a – 45°) = \sqrt{2} \sin a$
   c. $(\cos a – \cos b)^2 + (\sin a – \sin b)^2 = 2 (1 – \cos (a – b))$
   d. $\cos \left(a - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin a$
   e. $\sin \left(a - \pi\right) = – \sin a$

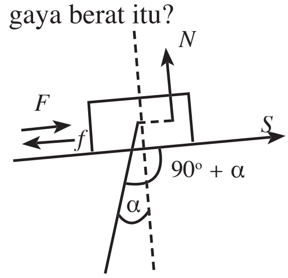
4. a. Jika α dan β sudut lancip, $\cos \alpha = \dfrac{4}{5}$, dan $\sin \beta = \dfrac{5}{13}$, tentukan $\cos (\alpha – \beta)$.
   b. Jika α di kuadran I, β di kuadran III, $\tan \alpha = \dfrac{3}{4}$, dan $\tan \beta = \dfrac{7}{24}$, tentukan $\cos (\alpha + \beta)$.
   c. Jika α dan β di kuadaran II, $\sin \alpha = \dfrac{5}{13}$, dan $\tan \beta = -\dfrac{3}{4}$, tentukan $\sin (\alpha + \beta)$.

5. a. Jika $\tan \alpha = \dfrac{1}{1-p}$ dan $\tan \beta = \dfrac{1}{1+p}$, buktikan bahwa $\tan(\alpha + \beta) = –2p^{-2}$.
   b. Jika $\sin b \cos (B – a) = \sin a \cos (b – B)$, buktikan $\sin (a – b) = 0$.

6. Sebatang tongkat yang beratnya w dipasang engsel pada titik P sehingga tongkat dapat bergerak bebas seperti gambar berikut. Besar tegangan tali sistem ini adalah $T \sin \alpha = \dfrac{1}{2} w$. Jika berat tongkat $4\sqrt{6}$ newton dan $\alpha = 75°$, berapa newton tegangan tali?



7. Sebuah benda yang massanya m didorong ke atas pada sebuah bidang miring yang kasar seperti ditunjukkan pada gambar berikut. Usaha (W) oleh gaya berat saat benda didorong sejauh S dirumuskan oleh $W = mgs \cos (90° + \alpha)$. Dalam hal ini g adalah percepatan gravitasi bumi yang besarnya 10 m/s^2.
   a. Tunjukkan bahwa $W = – mgs \sin \alpha$.
   b. Jika diketahui massa benda 4 kg, $\alpha = 45°$, dan benda terdorong sejauh $\sqrt{6}$ meter, berapa newton usaha oleh gaya berat itu?



B. Rumus Trigonometri untuk Sudut Ganda

1. Rumus untuk sin 2α

Anda telah mengetahui bahwa

$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

Untuk $\beta = \alpha$, diperoleh

$\sin (\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$

$\sin 2\alpha \quad = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

Jadi, $\boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha}$

2. Rumus untuk cos 2α

Anda juga telah mempelajari bahwa
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$.
Untuk $\beta = \alpha$, diperoleh

$\cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha$
$\cos 2\alpha \quad = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Jadi, $\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$

Untuk rumus $\cos 2\alpha$ dapat juga ditulis

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

Jadi, $\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$

Sekarang, coba Anda tunjukkan bahwa

$$\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$$

3. Rumus untuk tan 2α

Dari rumus

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

Untuk $\beta = \alpha$ diperoleh

$$\tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\alpha} \Leftrightarrow \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

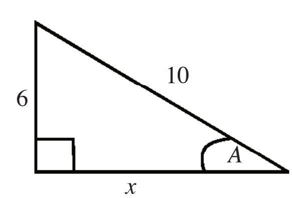
Jadi, $\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}}$

Contoh 3.4

1. Jika $\sin A = \frac{6}{10}$ dengan $0 < A < \frac{1}{2}\pi$, tentukan $\sin 2A$, $\cos 2A$, dan $\tan 2A$.
2. Buktikan bahwa
$$\sin\frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$$

Jawab:

1. Amati Gambar 3.3. Dengan menggunakan teorema Pythagoras, diperoleh



Gambar 3.3

$$x = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$$

- $\sin A = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
- $\tan A = \frac{6}{x} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$
- $\cos A = \frac{x}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{6}{4}}{\frac{7}{16}} = \frac{6}{4} \cdot \frac{16}{7} = \frac{27}{7}$$

2. $2 \sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \Leftrightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

Substitusikan $\alpha = \frac{1}{2}\theta$ ke persamaan tersebut, diperoleh

$$\sin \frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{2}} \Leftrightarrow \sin \frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$$

Contoh 3.5

Sebuah meriam yang ditembakkan ke atas membentuk sudut θ terhadap arah horizontal (perhatikan Gambar 3.4). Diketahui kecepatan awal peluru meriam v_0 m/s dan jarak R yang ditempuh peluru meriam memenuhi persamaan $R = \frac{1}{16} v_0^2 \sin\theta \cos\theta$.

Gambar 3.4

a. Tunjukkan bahwa $R = \frac{1}{32} v_0^2 \sin 2\theta$.

b. Carilah sudut θ yang memberikan R maksimum.

Jawab:

a. *Langkah ke-1*

Menuliskan apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan dari soal.

Diketahui:

- Kecepatan awal peluru meriam = v_o m/s.
- Jarak yang ditempuh peluru meriam = R.

Ditanyakan:

Menunjukkan $R = \frac{1}{32} v_0^2 \sin 2\theta$

Langkah ke-2
Menentukan konsep apa yang digunakan untuk menyelesaikan soal. Pada soal ini, konsep yang digunakan adalah rumus trigonometri untuk sudut ganda.
Langkah ke-3
Menunjukkan $R = \frac{1}{32} v_0^2 \sin 2\theta$ menggunakan strategi yang telah diketahui.
Anda telah mengetahui $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$ sehingga
$$R = \frac{1}{16} v_0^2 \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{16} v_0^2 \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2} = \frac{1}{32} v_0^2 \sin 2\theta.$$

b. Untuk kecepatan awal v_0, sudut θ terhadap arah horizontal mempengaruhi nilai R. Oleh karena fungsi sinus memiliki nilai maksimum 1, R akan maksimum ketika
$2\theta = 90° \Leftrightarrow \theta = 45°$

Tes Kompetensi Subbab B

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. **a.** Jika $\sin A = \frac{9}{15}$ dengan $0 < A < \frac{1}{2}\pi$, hitunglah sin 2A, cos 2A, dan tan 2A.

b. Jika $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{3x+1}}{3x}$ dan α lancip, hitunglah sin 2α, cos 2α, dan tan 2α.

2. Jika $\cos \alpha = \frac{1}{5}\sqrt{5}$ dan $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, hitunglah

a. sin 3α **c.** sin 4α
b. cos 3α **d.** cos 4α

3. Jika $\tan \alpha = -a$ dan $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, tentukan

a. sin 3α **c.** sin 4α
b. cos 3α **d.** cos 4α

4. Percepatan yang dialami silinder pejal yang ditempatkan pada bidang miring dengan sudut kemiringan α dirumuskan sebagai berikut.

a. $a = g \sin \alpha$ jika tidak ada gesekan antara silinder dan bidang miring.

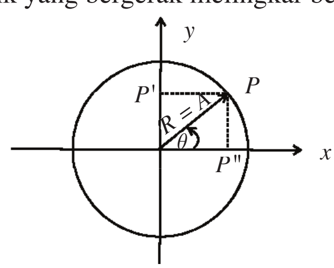
b. $a = \frac{2}{3} g \sin \alpha$ jika silinder menggelinding.

Misalkan sudut kemiringannya 22,5°, tentukan percepatan yang dialami silinder jika

a. tidak ada gesekan
b. silinder menggelinding

(Petunjuk: *jangan gunakan kalkulator, gunakan rumus setengah sudut*)

5. Gambar berikut memperlihatkan sebuah titik yang bergerak melingkar beraturan.



Simpangan dari getaran titik P' dirumuskan oleh $y = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)t$.

Dalam hal ini,
A = amplitudo getaran,
T = periode getaran, dan
t = lamanya titik benda bergetar.

Jika periode getaran 8 sekon dan benda titik bergetar selama $\frac{3}{2}$ sekon, tentukan simpangan dari getaran

a. titik P'

b. titik $P''t$

(Petunjuk: *gunakan rumus setengah sudut*).

6. Tulislah rumus sin $4a$ dan cos $4a$.
7. Nyatakan sin $16a$ dengan sin $8a$ dan cos $8a$.
8. Diketahui $\sin P = \frac{12}{20}$, dengan $0 < P < \frac{1}{2}\pi$. Hitunglah sin $2P$, cos $2P$, dan tan $2P$.
9. Dengan menggunakan rumus setengah sudut, hitunglah:

   a. tan 22,5° **d.** cos 112,5°

   b. tan 165° **e.** sin 292,5°

   c. cos 67,5° **f.** sin 157,5°
10. Untuk $\tan x = \frac{2}{3}$, $\tan y = \frac{3}{4}$, hitunglah:

    a. tan $2x$ **c.** tan $(2x + y)$

    b. tan $2y$ **d.** tan $(x + 2y)$

C. Perkalian, Penjumlahan, serta Pengurangan Sinus dan Kosinus

1. Perkalian Sinus dan Kosinus

Anda telah mempelajari rumus-rumus jumlah dan selisih dua sudut, yaitu:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}}$$

Sekarang, Anda akan mempelajari perkalian sinus dan kosinus. Untuk itu, pelajari uraian berikut.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \text{.... (1)}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad \text{.... (2)}$$

Dengan menjumlahkan (1) dan (2), Anda akan memperoleh

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

Jadi, $$\boxed{\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \text{.... (3)}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad \text{.... (4)}$$

Dengan mengurangkan (4) terhadap (3), diperoleh

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$$

Jadi, $$\boxed{\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{-2}}$$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ .... (5)
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ .... (6)

Dengan menjumlahkan (5) dan (6), diperoleh

$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

Jadi, $$\boxed{\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}}$$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ .... (7)
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ .... (8)

Dengan mengurangkan (8) terhadap (7), diperoleh

$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

Jadi, $$\boxed{\cos\alpha\sin\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}}$$

Contoh 3.6

1. Hitunglah:
a. cos 75° cos15° **b.** –2 sin 15°sin 75°
2. Buktikan 4 sin 72° cos 144° sin 216° = 1 – cos 144°.

Jawab:

1. **a.** $\cos 75° \cos 15° = \frac{1}{2}(\cos(75+15)° + \cos(75-15)°)$
$= \frac{1}{2}(\cos 90° + \cos 60°) = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

b. $-2\sin 15° \sin 75° = \cos(15+75)° - \cos(15-75)°$
$= \cos 90° - \cos(-60)°$
$= \cos 90° - \cos 60°$
$= 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

2. $4\sin 72° \cos 144° \sin 216° = 2\sin 72°[2\sin 216° \cos 144°]$
$= 2\sin 72°[\sin(360°) + \sin 72°]$
$= 2\sin 72°[0 + \sin 72°]$
$= 2\sin\cos 2(72°)$
$= 1 - \cos^2(72°)$
$= 1 - \cos 144°$

2. Penjumlahan dan Pengurangan Sinus

Rumus perkalian sinus dan kosinus di bagian C.1 dapat ditulis dalam rumus berikut.

$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$ .... (9)
$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$ .... (10)

Pembahasan Soal

Bentuk sederhana 4 sin 36° cos 72° sin 108° adalah ....

Jawab

4 sin 36° cos 72°sin 108° =
2 sin 36° [2 sin 108° cos 72°] =
2 sin 36° [sin(108 + 72)° + sin (108 – 72)°] =
2 sin 36°[0 + sin 36°] =
$2\sin^2 36° = 1 - \cos 2(36°)$
$= 1 - \cos 72°$

Soal Ebtanas 2000

$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$ .... (11)

$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$ .... (12)

Misalkan, $\alpha + \beta = p$ dan $\alpha - \beta = q$ sehingga diperoleh

$p + q = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = 2\alpha$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}(p+q)} \quad \text{.... (13)}$$

$p - q = \alpha + \beta - \alpha + \beta = 2\beta$

$$\boxed{\beta = \frac{1}{2}(p-q)} \quad \text{....(14)}$$

Coba Anda substitusikan persamaan (13) dan (14) pada rumus (9) sampai (12). Apakah Anda memperoleh kesimpulan berikut?

$$\boxed{\begin{aligned} &\cos p + \cos q = 2 \cos \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q) \\ &\cos p - \cos q = -2 \sin \tfrac{1}{2}(p+q) \sin \tfrac{1}{2}(p-q) \\ &\sin p + \sin q = 2 \sin \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q) \\ &\sin p - \sin q = 2 \cos \tfrac{1}{2}(p+q) \sin \tfrac{1}{2}(p-q) \end{aligned}}$$

Rumus tersebut mengubah (konversi) bentuk jumlah atau selisih dua kosinus atau dua sinus menjadi perkalian.

Pembahasan Soal

Nilai dari sin 105° – sin 15° adalah ....

Jawab:

sin 105° – sin 15° =

$2\cos\frac{1}{2}(105° + 15°)$

$\sin\frac{1}{2}(105° - 15°)$

$= 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{6}$

Soal Ebtanas 1997

Contoh 3.7

1. $\sin 105° + \sin 15° = 2 \sin \frac{1}{2}(105 + 15)° \cos \frac{1}{2}(105 - 15)°$

$$= 2 \sin \frac{1}{2}(120)° \cos \frac{1}{2}(90)°$$
$$= 2 \sin 60° \cos 45°$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

2. $\cos 75° - \cos 15° = -2 \sin \frac{1}{2}(75° + 15°) \sin \frac{1}{2}(75° - 15°)$

$$= -2 \sin 45° \sin 30°$$
$$= -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

3. Identitas Trigonometri

Misalkan, Anda akan membuktikan kebenaran hubungan berikut.

$$\boxed{\frac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{1 - \tan\alpha} = \cos^4\alpha} \qquad ...(15)$$

Cara membuktikannya dengan mengubah bentuk dari salah satu ruas persamaan tersebut sehingga menjadi bentuk yang sama dengan ruas lainnya.

Misalkan, Anda akan mengubah ruas kiri persamaan tersebut sehingga menjadi bentuk yang sama seperti di ruas kanan.

$$\frac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{1 - \tan^4\alpha} = \frac{\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)}{\left(1 + \tan^2\alpha\right)\left(1 - \tan^2\alpha\right)}$$

$$= \frac{1 \cdot \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)}{\sec^2\alpha\left(1 - \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}$$

$$= \frac{\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\left(\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}$$

$$= \frac{\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\left(\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)}}{\dfrac{1}{\cos^4\alpha}\cancel{\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^4\alpha}}$$

$$= \cos^4\alpha \qquad .... (16)$$

Bentuk (16) adalah bentuk yang sama dengan bentuk ruas kanan persamaan (15). Untuk menunjukkan kebenaran suatu identitas trigonometri, diperlukan pemahaman tentang identitas dasar seperti yang telah Anda pelajari dalam pembahasan sebelumnya. Sekarang, coba Anda ubah ruas kanan dari identitas (15) sehingga diperoleh ruas kiri.

Pembahasan Soal

Bentuk $\dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$ ekuivalen dengan ....

Jawab:

$$\frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2\dfrac{\sin x}{\cos x}}{1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\sin 2x}{1} = \sin 2x$$

Soal Ebtanas 2000

Hal Penting

- trigonometri
- sinus
- cosinus
- tangen
- sudut ganda
- identitas trigonometri

Contoh 3.8

Buktikan kebenaran identitas berikut.

$$\frac{2\sin 3x}{\sin x}+\frac{2\cos 3x}{\cos x}=8\cos 2x$$

Jawab:

$$\begin{aligned}\frac{2\sin 3x}{\sin x}+\frac{2\cos 3x}{\cos x}&=\frac{2\sin 3x\cos x+2\cos 3x\sin x}{\sin x\cos x}\\&=\frac{2\sin(3x+x)}{\frac{1}{2}\sin 2x}=\frac{4\sin 4x}{\sin 2x}\\&=\frac{4(2\sin 2x\cos 2x)}{\sin 2x}=8\cos 2x\end{aligned}$$

Tes Kompetensi Subbab C

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Tentukan nilai dari soal-soal berikut ini.
   - **a.** cos 105° cos 15°
   - **b.** sin 75° cos 15°
   - **c.** 2 cos 15° sin 45°
   - **d.** 2 cos 75° sin 45°
   - **e.** 2 sin 82,5° cos 37,5°
   - **f.** 2 sin 127,5° sin 97,5°

2. Tentukan nilai dari soal-soal berikut.
   - **a.** sin 75° + sin 15°
   - **b.** sin 75° – sin 45°
   - **c.** cos 45° – cos 15°
   - **d.** cos 105° + cos 15°

3. Hitunglah soal-soal berikut.
   - **a.** cos 465° cos 165°
   - **b.** $\dfrac{\sin 75^\circ+\sin 15^\circ}{\cos 75^\circ-\cos 15^\circ}$
   - **c.** cos 220° + cos 100° + cos 20°
   - **d.** cos 130° + cos 110° + cos 10°
   - **e.** $\dfrac{\sin 115^\circ+\sin 35^\circ}{\cos 115^\circ-\cos 35^\circ}$

4. Buktikan kebenaran identitas berikut.
   - **a.** $\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\tan\dfrac{A+B}{2}$
   - **b.** $\dfrac{\sin 4A+\sin 2A}{\cos 4A+\cos 2A}=\tan 3A$
   - **c.** $\dfrac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$

5. Nyatakan soal-soal berikut sebagai suatu jumlah atau selisih.
   - **a.** cos $3x$ cos $2x$
   - **b.** sin $4x$ sin $3x$
   - **c.** sin $5x$ cos $2x$
   - **d.** cos $7x$ sin $3x$
   - **e.** 2 cos $3x$ cos $6x$
   - **f.** 2 sin $3x$ sin $5x$
   - **g.** 2 sin $2x$ cos $7x$
   - **h.** 2 cos $5x$ sin $8x$

6. Nyatakan soal-soal berikut sebagai suatu hasil kali.
   - **a.** cos $3x$ + cos $2x$
   - **b.** cos $4x$ – cos $3x$
   - **c.** sin $5x$ + sin $2x$
   - **d.** sin $7x$ – sin $3x$

e. $\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 3x$

f. $\frac{1}{2}(\cos 5x - \cos 6x)$

7. Buktikan kebenaran identitas berikut.

a. $\frac{\sin A + \sin 3A}{\cos A - \cos 3A} = \cot A$

b. $\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan \frac{A+B}{2}$

c. $\frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B} = \cot \frac{B-A}{2}$

8. Jika $x = \sin 3\theta + \sin \theta$ dan $y = \cos 3\theta + \cos \theta$, buktikan identitas berikut.

a. $x + y = 2 \cos \theta (\sin 2\theta + \cos 2\theta)$

b. $\frac{x}{y} = \tan 2\theta$

c. $x^2 + y^2 = 2 + 2 \cos 2\theta$

9. Jelaskan strategi yang Anda lakukan untuk menyelesaikan soal pembuktian identitas trigonometri. Bandingkan hasilnya dengan teman lain. Manakah yang strateginya lebih baik?

Rangkuman

- Rumus-rumus jumlah dan selisih sudut adalah
  1. $\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
  2. $\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
  3. $\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
  4. $\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
  5. $\tan (\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$

  Sekarang, lanjutkan rangkuman di atas.

Refleksi

Setelah Anda mempelajari Bab 3,

1. tuliskanlah materi mana yang menurut Anda sulit dan yang mudah,
2. bagian manakah yang menurut Anda amat menarik dan penting untuk dipelajari.

Tes Kompetensi Bab 3

A. Pilihlah salah satu jawaban dan berikan alasannya.

1. $\dfrac{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}{\tan 15^\circ} = ...$

   a. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$ d. $-\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}\right)$

   b. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$ e. $-\left(\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\sqrt{6}\right)$

   c. $2-\sqrt{3}$

2. $\sin(45° + \alpha) - \sin(45° - \alpha) = ...$

   a. $\sqrt{2}\sin\alpha$ d. $2\cos\alpha$

   b. $2\sin\alpha$ e. $\sin 2\alpha$

   c. $\sqrt{2}\cos\alpha$

3. $\sin(30^\circ + \beta) + \cos(60^\circ + \beta) = ...$

   a. $\sin\beta$ d. $2\cos\beta$

   b. $\cos\beta$ e. $\cos\dfrac{\beta}{2}$

   c. $2\sin\beta$

4. $\dfrac{\sin(a-b)}{\tan a - \tan b} = ...$

   a. $\cos a \cos b$ d. $-\sin a \sin b$

   b. $\sin a \sin b$ e. $\cos(a-b)$

   c. $-\cos a \cos b$

5. Jika $\sin A = \dfrac{2}{3}$ dan $\cos A < 0$ maka $\tan 2A$ = ...

   a. $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ d. $\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

   b. $-4\sqrt{5}$ e. $4\sqrt{5}$

   c. $-\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

6. Jika $\sin 38° = p$ maka $\sin 76°$ = ...

   a. $2p\sqrt{1-p^2}$ d. $2p^2 - 1$

   b. $2p^2 + 1$ e. $\dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}$

   c. $2p$

7. Jika $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}, \cos\beta = \dfrac{5}{13}, \alpha$ dan β di kuadran I maka $\sin(\alpha - \beta)$ = ...

   a. $\dfrac{56}{65}$ d. $\dfrac{63}{65}$

   b. $-\dfrac{33}{65}$ e. $\dfrac{64}{65}$

   c. $-\dfrac{16}{65}$

8. Jika $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ dan $\sin\beta = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$, α di kuadran II, dan β di kuadran IV maka $\cos(\alpha + \beta)$ = ...

   a. $\dfrac{-3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{12}$ d. $\dfrac{6-\sqrt{35}}{12}$

   b. $\dfrac{-3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{12}$ e. $\dfrac{8-\sqrt{35}}{12}$

   c. $\dfrac{6+\sqrt{35}}{12}$

9. Jika $\dfrac{\tan^2 x}{1+\sec x} = 1;\ 0^\circ \le x \le 90^\circ$ maka sudut x adalah ....

   a. 0° d. 60°

   b. 30° e. 75°

   c. 45°

10. Bentuk $\dfrac{\sin x \cos x}{\cos^{2x} - \sin^{2x}}$ ekuivalen dengan ....

    a. $\dfrac{1+\tan^{2x}}{\tan x}$ d. $\dfrac{1+\tan^2 x}{\tan x}$

    b. $\dfrac{\tan^x}{1-\tan^2 x}$ e. $\dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x}$

    c. $1+\tan x$

11. sin (x + 30) + cos (x + 60)=…

a. sin x **d**. cotan x

b. cos x **e**. sec x

c. sin x

12. $-2 \sin^2 \sin 15^\circ \sin 75^\circ$ = ...

a. $-\frac{1}{4}$ d. $\frac{1}{2}$

b. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ e. $\frac{1}{4}$

c. $-\frac{1}{2}$

13. Jika $\sin\theta = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$, θ di kuadran IV maka $\tan\frac{1}{2}\theta = ...$

a. $\sqrt{\frac{2}{5}}$ **e**. $-\sqrt{\frac{3}{5}}$

b. $\sqrt{\frac{5}{2}}$ **d**. $-\sqrt{\frac{5}{2}}$

c. $-\sqrt{\frac{2}{5}}$

14. cos 110° sin 55° = ...

a. $\frac{1}{2}(\sin 165^\circ + \sin 55^\circ)$

b. $\frac{1}{2}(\sin 165^\circ - \sin 55^\circ)$

c. $\frac{1}{2}(\sin 55^\circ - \sin 165^\circ)$

d. $\frac{1}{2}(\cos 165^\circ + \cos 55^\circ)$

e. $\frac{1}{2}(\cos 165^\circ - \cos 55^\circ)$

15. cos 35° – cos 75° = ...

a. –2 sin 55° sin 20°

b. 2 sin 55° cos 20°

c. –2 sin 55° cos 20°

d. 2 cos 55° sin 20°

e. –2 cos 55°cos 20°

16. Periode grafik fungsi $y = \frac{1}{3}\cos Px$ adalah $\frac{2\pi}{3}$ maka nilai P adalah ....

a. $\frac{1}{3}$ **d**. 6

b. 2 **e**. $\frac{2}{3}$

c. 3

17. Identitas yang benar adalah ....

(1) $\cos 2x = \cos^4 x - \sin^4 x$

(2) $\cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$

(3) $\cos 2x = \sin\frac{\pi}{2}\cos 2x - \cos\frac{\pi}{2}\sin 2x$

(4) $\cos 2x = 2\cos^2 x + 1$

a. (1), (2), dan (3)

b. (1), dan (3)

c. (2) dan (4)

d. (4)

e. semua benar

18. Fungsi $y = 4 \sin x \sin (x + 60^\circ)$ mencapai nilai minimum pada ....

a. $x = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$

b. $x = 60^\circ + k \cdot 180^\circ$

c. $x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ$

d. $x = 30^\circ + k \cdot 180^\circ$

e. $x = k \cdot 360^\circ$

19. $\sin 292\frac{1}{2}^\circ = ...$

a. $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ **d**. $-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

b. $-\frac{1}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}}$ **e**. $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

c. $-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

20. Jika $\cos\theta = \frac{3}{4}$ maka tan 2θ = ...

a. $\frac{24}{7}$ **d**. $-\frac{24}{5}$

b. $-\frac{24}{7}$ **e**. $\pm\frac{24}{7}$

c. $\frac{24}{5}$

B. Jawablah dengan singkat, tepat, dan jelas.

1. Buktikan bahwa

   a. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+0\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\sqrt{2}\sin\theta$

   b. $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}+0\right)=\cos\theta$

   c. $\frac{\tan(\alpha+\beta)}{\cot(\alpha-\beta)}=\frac{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}{1-\tan^2\alpha\tan^2\beta}$

2. a. Diketahui α, β, dan γ menyatakan besar sudut-sudut segitiga ABC, tan α = –3, dan tan β = 1. Tentukan tan γ.

   b. Jika $A + B + C = 180°$, tunjukkan bahwa $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

3. Jika $3\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, tentukan:

   a. nilai tan $2x$
   b. nilai cos $2x$
   c. nilai sin $4x$

4. Buktikan:

   a. $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{1+\cos A}$

   b. $\operatorname{cosec} 2A=\frac{1+\cot^2 A}{2\cot A}$

   c. $\frac{\sec A-1}{\sec A+1}=\tan^2\frac{A}{2}$

   d. $\frac{\sin 2A}{\sin A}=\frac{1+\cos 2A}{\cos A}$

5. Buktikan kebenaran identitas berikut.

   a. $\frac{\sin 4A+\sin 2A}{\cos 4A+\cos 2A}=\tan 3A$

   b. $\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$

   c. $\frac{\sin A+\sin 3A}{\cos A+\cos 3A}=\tan 2A$

Bab **4**

Sumber: www.panebianco3D.com

Lingkaran

Setelah mempelajari bab ini, Anda harus mampu merumuskan persamaan lingkaran dan menggunakannya dalam pemecahan masalah; menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dalam berbagai situasi.

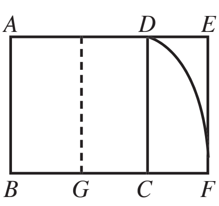
A. **Persamaan Lingkaran**
B. **Persamaan Garis Singgung Lingkaran**

Anda telah mempelajari konsep lingkaran di Kelas VIII. Pada pembahasan konsep lingkaran tersebut telah dibahas mengenai *keliling* dan *luas daerah lingkaran*. Pada bab ini, konsep lingkaran akan dikembangkan pada *bentuk umum persamaan lingkaran* dan *persamaan garis singgung lingkaran*.

Konsep lingkaran sangat penting peranannya dalam ilmu pengetahuan dan teknologi untuk memecahkan suatu masalah seperti berikut.

Gedung Parthenon dibangun 440 SM. Gedung tersebut dirancang oleh arsitek Yunani dengan menggunakan perbandingan nisbah emas.

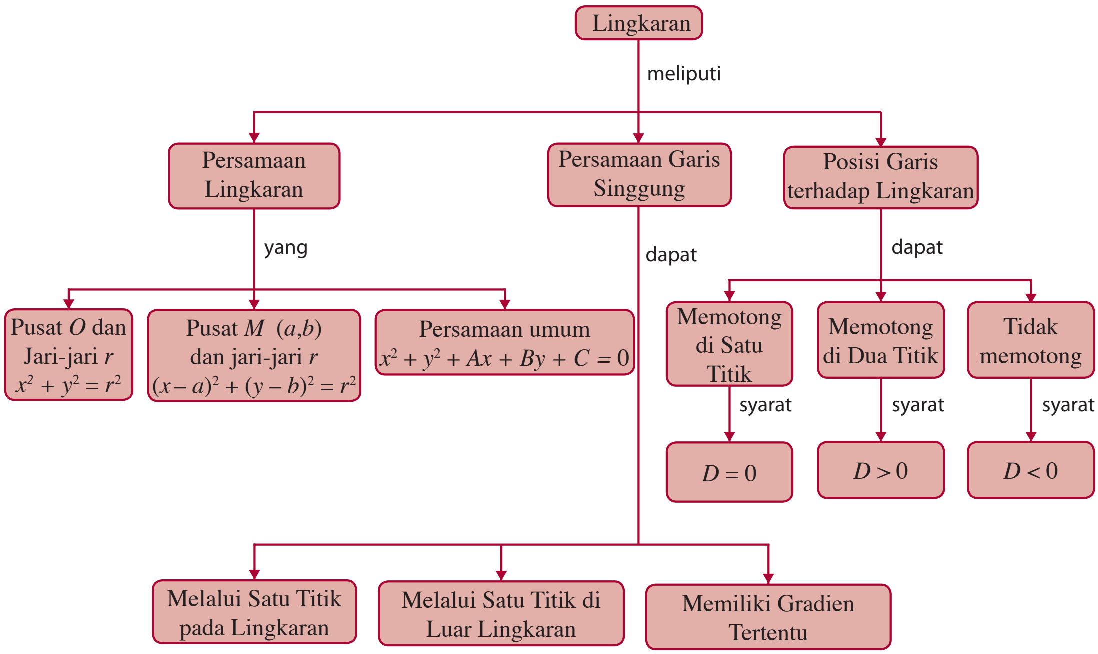
Amati gambar berikut.



Pada titik tengah sisi persegi $ABCD$ dibuat busur lingkaran dengan pusat G dan jari-jari $\overline{GD}$. Lingkaran tersebut memotong perpanjangan $\overline{BC}$ di F. Nisbah $BF : AB$ disebut perbandingan nisbah emas. Menurut para ahli, perbandingan nisbah emas merupakan perbandingan yang paling enak dipandang. Jika busur DF memenuhi persamaan $x^2 + y^2 - 138y - 44 = 0$, berapa perbandingan nisbah emas gedung Parthenon?

Diagram Alur

Untuk mempermudah Anda dalam mempelajari bab ini, pelajarilah diagram alur yang disajikan sebagai berikut.



Tes Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Jelaskan apa yang Anda ketahui Tentang teorema Pythagoras.

2. Sebutkan langkah-langkah yang Anda lakukan untuk melengkapkan bentuk kuadrat ruas kiri persamaan kuadrat $x^2 + 14x = 15$.

3. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan kuadrat berikut.

a. $x^2 - 7x + 12 \leq 0$

b. $-x^2 + 4x - 2 \geq 0$

4. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik (2,0) dan bergradien 2.

5. **a.** Bagaimana hubungan gradien antara dua garis sejajar? Jelaskan.

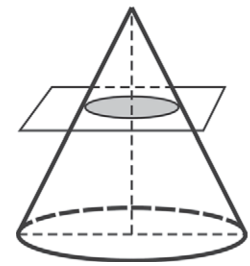
b. Bagaimana hubungan gradien antara dua garis tegak lurus? Jelaskan.

6. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik A(1,3) dan B (3,7).

7. Tentukan jarak antara titik A (2,2) dan B (5,2).

A. Persamaan Lingkaran

Gambar 4.1 memperlihatkan irisan kerucut berbentuk lingkaran. Pada gambar itu tampak bahwa bidang datarnya mengiris seluruh bagian dari selimut dan tegak lurus sumbu kerucut.



Gambar 4.1

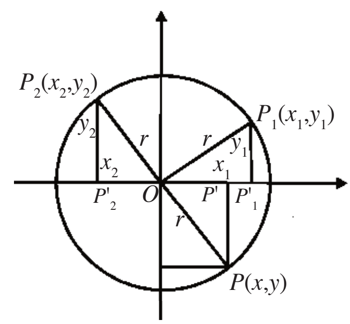
Tentunya, Anda masih ingat definisi lingkaran yang telah dipelajari di SMP. Agar Anda ingat kembali, berikut ini disajikan definisi lingkaran.

Definisi 4.1

Lingkaran ialah tempat kedudukan titik-titik yang mempunyai jarak yang sama terhadap satu titik tertentu.

1. Persamaan Lingkaran Berpusat di *O* (0, 0) dan Berjari-jari *r*

Amati Gambar 4.2. Diketahui, titik $P(x, y)$ adalah titik sebarang pada lingkaran L. Apabila titik P diproyeksikan pada sumbu-x maka diperoleh titik P' sehingga segitiga OPP' adalah segitiga siku-siku di P'.



Gambar 4.2

Pada segitiga OPP' berlaku Teorema Pythagoras sebagai berikut.

$OP^2 = (OP')^2 + (P'P)^2$

$\Leftrightarrow r^2 = x^2 + y^2$

Lingkaran L dapat dituliskan sebagai berikut.

$$L = \{(x, y) | x^2 + y^2 = r^2\}$$

Pandang titik $P_1(x_1, y_1)$ pada $\Delta OP_1P'_1$. Pada segitiga tersebut berlaku $x^2_1 + y^2_1 = r^2_1$. Pandang titik $P_2(x_2, y_2)$ pada $\Delta OP_2P_2'$. Pada segitiga tersebut berlaku $x^2_2 + y^2_2 = r^2_2$, dan seterusnya. Secara umum untuk setiap titik $P(x, y)$ pada lingkaran ini berlaku $x^2 + y^2 = r^2$.

Jadi, persamaan lingkaran yang berpusat di $O(0, 0)$ dan berjari-jari r adalah

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

Contoh 4.1

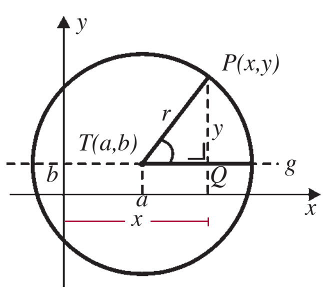
1. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (0, 0) dengan panjang jari-jari $2\sqrt{3}$.
2. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di titik (0, 0) dan melalui titik (–6, –8).

Jawab:

1. Jari-jari $r = 2\sqrt{3}$ sehingga $r^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12$.

   Jadi, persamaan lingkaran berpusat di (0, 0) dengan jari-jari $2\sqrt{3}$ adalah $x^2 + y^2 = 12$.
2. Persamaan lingkaran berpusat di (0, 0) dengan jari-jari r adalah
   $x^2 + y^2 = r^2$.... (1)
   Oleh karena lingkaran melalui titik (–6, –8) maka dengan menyubstitusikan (–6, –8) pada persamaan (1), diperoleh
   $$x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow (-6)^2 + (-8)^2 = r^2$$
   $$\Leftrightarrow r^2 = 36 + 64 = 100$$
   $$\Leftrightarrow r = \sqrt{100} = 10$$
   Kemudian, $r^2 = 100$ substitusikan pada persamaan (1), diperoleh $x^2 + y^2 = 100$.
   Jadi, persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 = 100$.

2. Persamaan Lingkaran dengan Pusat *T* (*a*, *b*) dan Berjari-Jari *r*



Gambar 4.3

Diketahui, sebuah lingkaran berpusat di titik $T(a,b)$ dengan jari-jari r seperti diperlihatkan pada Gambar 4.3. Titik $P(x, y)$ adalah titik sebarang pada lingkaran, garis g adalah garis yang melalui titik pusat $T(a, b)$ dan sejajar dengan sumbu-x. Proyeksi titik P terhadap garis g adalah titik Q sehingga segitiga TPQ siku-siku di Q.

Diketahui jarak $TQ = (x - a)$ dan jarak $PQ = (y - b)$. Pada segitiga TPQ berlaku teorema *Pythagoras* sebagai berikut.

$TP^2 = TQ^2 + PQ^2 \Leftrightarrow r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$

Lingkaran L dapat dituliskan sebagai berikut:

$L: \{(x, y)(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$

Jadi, persamaan lingkaran yang berpusat di $T(a, b)$ dan berjari-jari r adalah

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$$

Selanjutnya, persamaan tersebut dinamakan *persamaan lingkaran standar* (baku).

Contoh 4.2

1. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (2,–1) dengan jari-jari $3\sqrt{2}$.
2. Tentukan persamaan lingkaran standar dengan pusat T (3,–4) dan menyinggung garis $4x - 3y - 49 = 0$.

Jawab:

1. Persamaan lingkaran standar $(x - a)^2 + (x - b)^2 = r^2$.
   Untuk pusat (2,–1) dengan jari-jari $3\sqrt{2}$, diperoleh
   $(x - 2)^2 + (y - (-1))^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 18$
   Jadi, persamaan lingkarannya adalah $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 18$.
2. Rumus jarak dari titik T (x_1, y_1) ke garis $ax + by + c = 0$ adalah
   $$d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$
   Jarak dari pusat T (3,–4) ke garis $4x - 3y - 49 = 0$ adalah jari-jari lingkaran, yaitu
   $$r = \left|\frac{4.3 - 3(-4) - 49}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}\right| = \left|\frac{12 + 12 - 49}{5}\right| = 5$$
   Jadi, persamaan lingkarannya adalah
   $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$.

3. Bentuk Umum Persamaan Lingkaran

Anda telah mempelajari persamaan lingkaran yang berpusat di titik T (a, b) dengan jari-jari r, yaitu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Jika persamaan tersebut diuraikan maka diperoleh

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$
$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

dengan $A = -2a$; $B = -2b$; dan $C = (a^2 + b^2 - r^2)$; A, B, dan C bilangan real. Jadi,

$$\boxed{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}$$

adalah persamaan lingkaran yang berpusat di $T(a, b)$ dengan jari-jari r, $A = -2a$, $B = -2b$, $C = a^2 + b^2 - r^2$, A, B, dan C bilangan real.

Soal Terbuka

1. Buatlah 3 buah persamaan lingkaran yang berpusat di (0, 0). Berikan hasilnya kepada teman Anda untuk dicek dan beri komentar.
2. Buatlah 3 buah persamaan lingkaran yang berpusat di (a,b). Berikan hasilnya kepada teman Anda untuk dicek dan beri komentar.

Tugas

Bersama kelompok belajar Anda, gambarlah pada kertas grafik Anda persamaan lingkaran

$x^2 + y^2 - 2x - 6y - \frac{101}{2} = 0.$

Kemudian, hasilnya kumpulkan pada guru Anda.

Cobalah Anda ubah persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ ke dalam bentuk kuadrat sempurna. Tuliskan langkah-langkahnya di buku tugas Anda, kemudian kumpulkan pada guru Anda.

Jika bentuk umum persamaan lingkaran itu diubah dalam bentuk kuadrat sempurna maka diperoleh

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$(x^2 + Ax) + (y^2 + By) = -C$

$$\left(x^2 + Ax + \left(\frac{1}{2}A\right)^2\right) + \left(y^2 + By + \left(\frac{1}{2}B\right)^2\right) = \left(\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(\frac{1}{2}B\right)^2 - C$$

$$\left(x + \frac{1}{2}A\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}B\right)^2 = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C$$

Dari persamaan tersebut, diperoleh pusat lingkaran $\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$ dan jari-jari lingkaran $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$.

Contoh 4.3

1. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.
2. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $2x^2 + 2y^2 - 4x - 12y = 101$.

Jawab:

1. Bentuk umum persamaan lingkaran adalah
   $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
   Dengan demikian, $A = -4$, $B = 6$, dan $C = -3$.
   Pusat $M\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) = M(2,-3)$
   Jari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} = \sqrt{\frac{1}{4}.16 + \frac{1}{4}.36 + 3} = \sqrt{16} = 4$
2. Ubahlah persamaan pada soal menjadi bentuk umum, seperti berikut.
   $2x^2 + 2y^2 - 4x - 12y - 101 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y - \frac{101}{2} = 0$
   Dengan demikian, $A = -2$, $B = -6$, dan $C = -\frac{101}{2}$.
   Pusat $M\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) = M\left(-\frac{1}{2}(-2), -\frac{1}{2}(-6)\right) = (1, 3)$
   Jari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}.4 + \frac{1}{4}.36 + \frac{101}{2}} = \sqrt{1 + 9 + \frac{101}{2}}$
   $= \sqrt{\frac{121}{2}} = \frac{-11}{\sqrt{2}} = \frac{11}{2}\sqrt{2}$

4. Posisi Titik terhadap Lingkaran

Bentuk geometris persamaan lingkaran $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$ diperlihatkan pada Gambar 4.4. Pada gambar itu tampak bahwa titik $P_1(1, 3)$ terletak di dalam lingkaran, titik $P_2(5, 2)$ terletak pada lingkaran, sedangkan titik $P_3(6, -3)$ terletak di luar lingkaran.

Anda dapat mengetahui posisi titik $P(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran yang berpusat di $T(a, b)$ berjari-jari r hanya dengan mengetahui jarak titik $P(x_1, y_1)$ ke pusat lingkaran $T(a, b)$.

- Jika jarak titik $P(x_1, y_1)$ ke pusat lingkaran $T(a, b)$ kurang dari jari-jari lingkaran maka titik $P(x_1, y_1)$ berada di dalam lingkaran seperti diperlihatkan pada Gambar 4.5(a). Secara matematis ditulis $|PT| < r$

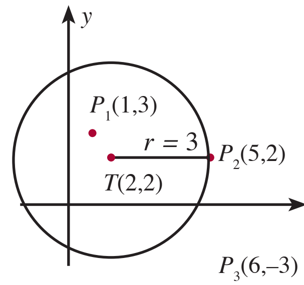
  $$\sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2} < r$$
  $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 < r^2$ atau
  $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C < 0$

- Jika jarak titik $P(x_1, y_1)$ ke pusat lingkaran $T(a, b)$ sama dengan jari-jari lingkaran maka titik $P(x_1, y_1)$ berada pada lingkaran seperti diperlihatkan pada Gambar 4.5(b). Secara matematis, ditulis $|PT| = r$

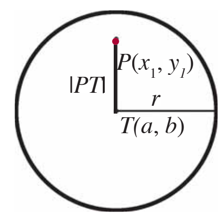
  $$\sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2} = r$$
  $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$ atau
  $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C = 0$

- Jika jarak titik $P(x_1, y_1)$ ke pusat lingkaran $T(a, b)$ lebih dari jari-jari lingkaran maka titik $P(x_1, y_1)$ berada di luar lingkaran seperti diperlihatkan pada Gambar 4.5(c). Secara matematis ditulis $|PT| > r$

  $$\sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2} > r$$
  $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 > r^2$ atau
  $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C > 0$

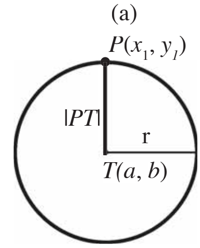


Gambar 4.4



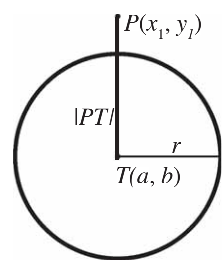
$|PT| < r$

(a)



$|PT| = r$

(b)



$|PT| > r$

(c)

Gambar 4.5

Contoh 4.4

Tentukanlah posisi titik $A(5, 1)$, $B(4, -4)$, dan $C(6, 3)$ terhadap lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

Jawab:

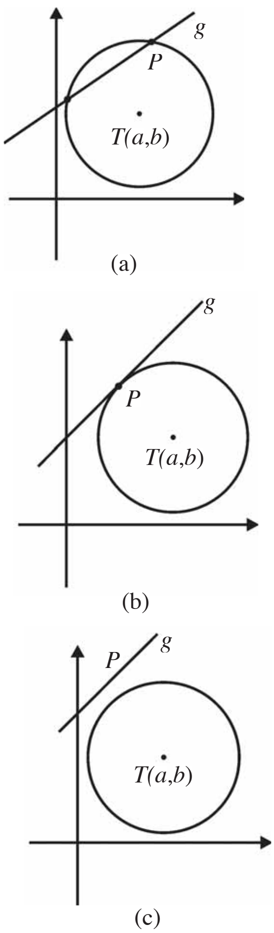
Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ dapat diubah sebagai berikut.

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$
$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) - 12 = 0$
$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) - 12 = 0 + 4 + 9$ ... kedua ruas ditambah 4 dan 9

Soal Terbuka

Buatlah sebuah persamaan lingkaran. Kemudian, tentukan titik-titik yang berada di dalam, di luar, dan pada lingkaran (masing-masing 3 buah).

$(x-2)^2 + (y+3)^2 - 12 = 13$
$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$
Titik A (5, 1) terletak pada lingkaran sebab $(5-2)^2 + (1+3)^2 = 25$.
Titik B (4, –4) terletak di dalam lingkaran sebab
$(4-2)^2 + (-4+3)^2 < 25$.
Titik C (6, 3) terletak di luar lingkaran sebab
$(6-2)^2 + (3+3)^2 > 25$.



Gambar 4.6

5. Posisi Garis terhadap Lingkaran

Diketahui garis g: $y = mx + n$, dan lingkaran L: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Perpotongan garis g dengan lingkaran L adalah

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$
$$x^2 + (mx + n)^2 + Ax + B(mx + n) + C = 0$$
$$x^2 + m^2x^2 + 2mnx + n^2 + Ax + Bmx + Bn + C = 0$$
$$(1 + m^2)x^2 + (2mn + A + Bm)x + n^2 + Bn + C = 0$$

Nilai diskriminan persamaan kuadrat tersebut adalah

$$D = b^2 - 4ac$$
$$= (2mn + A + Bm)^2 - 4(1 + m^2)(n^2 + Bn + C)$$

- Jika $D > 0$, diperoleh dua buah akar real yang berlainan. Secara geometris, garis g: $y = mx + n$ akan memotong lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ di dua titik yang berlainan, seperti pada Gambar 4.6(a).
- Jika $D = 0$, diperoleh dua buah akar real yang sama. Secara geometris, garis g: $y = mx + n$ akan memotong lingkaran
  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, di satu titik. Dikatakan garis g menyinggung lingkaran tersebut, seperti diperlihatkan pada Gambar 4.6(b).
- Jika $D < 0$, diperoleh dua buah akar imajiner yang berlainan. Secara geometris, garis g : $y = mx + n$ tidak memotong atau menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ seperti diperlihatkan pada Gambar 4.6(c).

Contoh 4.5

Diketahui garis lurus g dengan persamaan $y = mx + 2$ dan lingkaran L dengan persamaan $x^2 + y^2 = 4$. Agar garis g memotong lingkaran L di dua titik yang berbeda, tentukan nilai m yang memenuhi.

Jawab:

$y = mx + 2$ maka $y^2 = (mx + 2)^2 = m^2x^2 + 4mx + 4$

$x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + m^2x^2 + 4mx + 4 = 4$

$\Leftrightarrow (1+ m^2)x^2 + 4mx = 0$

Diskriminan $D = (4m)^2 - 4(1 + m^2)(0)$

$D = 16m^2$

Agar garis g memotong lingkaran L di dua titik maka haruslah $D > 0$.

Dengan demikian, $16m^2 > 0$

$\Leftrightarrow m^2 > 0$

$\Leftrightarrow m > 0$

Jadi, nilai m yang memenuhi adalah $m > 0$.

Tantangan untuk Anda

Titik $A(4,8)$, $B(2,4)$, dan $C(10,0)$ terletak pada lingkaran.

a. Tunjukkan bahwa segitiga *ABC* adalah segitiga siku-siku di *B*.

b. Mengapa titik $P(7,0)$ adalah pusat lingkaran? Jelaskan

c. Hitunglah jari-jari lingkaran tersebut.

d. Carilah persamaan lingkaran tersebut.

Tes Kompetensi Subbab A

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Tentukan persamaan lingkaran dalam bentuk standar (baku) untuk setiap soal berikut.

a. Pusat $(-2, -1)$ dan jari-jari $3\sqrt{3}$.

b. Pusat $(1, -3)$ dan melalui titik $(1, 1)$.

c. Pusat $(1, -2)$ dan diameter $4\sqrt{2}$.

d. Mempunyai diameter yang ujungnya melalui titik $(1, -1)$ dan $(1, 5)$.

2. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran soal-soal berikut.

a. $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 16 = 0$

b. $4x^2 + 4y^2 + 8x - 16y + 17 = 0$

c. $3x^2 + 3y^2 - 12x + 18y + 35 = 0$

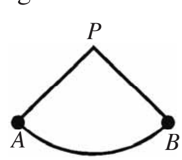
d. $4x^2 + 4y^2 + 4x + 12y + 1 = 0$

3. Bagaimana posisi titik-titik berikut ini (di dalam, pada, atau di luar lingkaran) terhadap lingkaran yang diketahui?

a. $P(-1,6)$, $Q(1,4)$, dan $R(-3,5)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 22 = 0$.

b. $K(-2,1)$, $L(-1,0)$, dan $M(5,4)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$.

4. Sebuah ayunan bandul bergerak bolak-balik seperti diperlihatkan pada gambar berikut. Lintasan ayunan bandul (busur *AB* pada gambar) memenuhi persamaan lingkaran $2x^2 + 2y^2 - 6{,}8y - 1{,}9 = 0$.

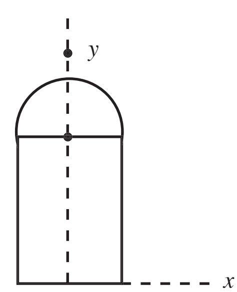


a. Berapa panjang ayunan bandul?

b. Berapa koordinat titik *P*?

5. Nyatakan apakah garis $y = \frac{1}{2}x + 5$ memotong lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ di satu titik, dua titik, atau tidak memiliki titik potong.

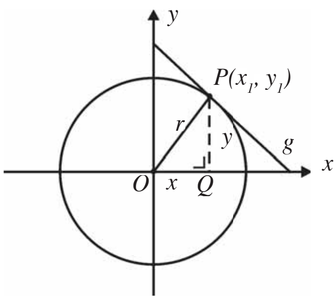
6. Bentuk geometris jendela sebuah gedung terdiri atas persegipanjang dan setengah lingkaran. Jendela tersebut dirancang oleh arsitek menggunakan sistem koordinat seperti diperlihatkan pada gambar berikut. Jika keliling setengah lingkaran dari jendela tersebut memenuhi persamaan $x^2 + y^2 - 3y + 1{,}25 = 0$, berapa m^2 luas daerah jendela tersebut? (Petunjuk: *anggap satuan luasnya* m^2).



B. Persamaan Garis Singgung Lingkaran

1. Persamaan Garis Singgung Melalui Suatu Titik pada Lingkaran

Titik $P(x_1, y_1)$ terletak pada garis g dan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, seperti diperlihatkan pada Gambar 4.7.



Gambar 4.7

Gradien garis yang menghubungkan titik O dan titik P adalah $m_{OP} = \frac{y_1}{x_1}$. Garis g menyinggung lingkaran di P, jelas $OP \perp g$ sehingga $m_{OP} \cdot m_g = -1$ atau $m_g = \frac{-1}{m_{op}}$. Akibatnya, gradien garis g adalah $m_g = \frac{-1}{m_{op}} = -\frac{x_1}{y_1}$.

Jadi, persamaan garis singgung g adalah

$$y - y_1 = m_g(x - x_1) \Leftrightarrow y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$
$$\Leftrightarrow y_1(y - y_1) = -x_1(x - x_1)$$
$$\Leftrightarrow x_1x + y_1y = x_1^2 + y_1^2 \qquad \text{.... (i)}$$

Titik $P(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ sehingga

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 \qquad \text{....(ii)}$$

Apabila persamaan (ii) disubstitusikan ke persamaan (i) diperoleh

$$\boxed{\mathbf{g: x_1x + y_1y = r^2}}$$

Persamaan tersebut adalah persamaan garis singgung yang melalui titik $P(x_1, y_1)$ dan terletak pada lingkaran $L : x^2 + y^2 = r^2$.

Anda pun dapat menentukan persamaan garis singgung g melalui titik $P\ (x_1, y_1)$ yang terletak pada lingkaran $L : (x - a)^2 + (y - b) = r^2$ dengan pusat di $M(a, b)$ dan jari-jari r, yaitu

$$\boxed{\mathbf{g: (x - a)\ (x_1 - a) + (y - b)\ (y_1 - b) = r^2}}$$

Bersama teman sebangku, buktikan persamaan tersebut. Kemudian, kemukakan hasilnya di depan kelas (beberapa orang saja).

Diketahui titik $P(x_1, y_1)$ terletak pada garis g dan lingkaran L: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ seperti diperlihatkan pada Gambar 4.8. Gradien garis yang menghubungkan titik T dan titik P adalah

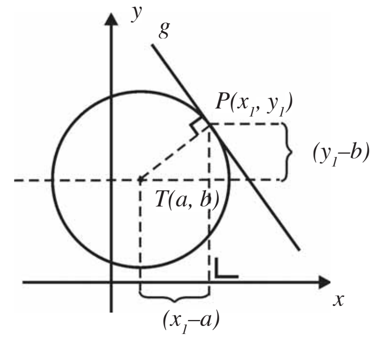
$m_{TP} = \dfrac{y_1 - b}{x_1 - a}$.

Garis g menyinggung lingkaran maka

$g \perp TP$ dan $m_g \cdot m_{MP} = -1$ sehingga $m_g = -\dfrac{x_1 - a}{y_1 - b}$

Jadi, persamaan garis singgung g adalah

$$y - y_1 = m_g (x - x_1)$$
$$y - y_1 = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}(x - x_1)$$
$$(y - y_1)(y_1 - b) = -(x_1 - a)(x - x_1)$$
$$y_1y - by - y_1^2 + y_1b = -x_1x + x_1^2 + ax - ax_1$$
$$y_1y - by + y_1b + x_1x - ax + ax_1 = x_1^2 + y_1^2 \quad .... (1)$$



Gambar 4.8

Titik $P(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran L sehingga diperoleh

$$x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C = 0$$
$$x_1^2 + y_1^2 = -(Ax_1 + By_1 + C) \quad .... (2)$$

Substitusikan (2) pada (1), diperoleh

$$y_1y - by + y_1b + x_1x - ax + ax_1 = -(Ax_1 + By_1 + C) \quad .... (3)$$

Dari uraian sebelumnya, diperoleh $-\frac{1}{2}A = a, -\frac{1}{2}B = b$ .... (4)

Substitusikan (4) pada (3) sehingga persamaan (3) menjadi

$$y_1y + \frac{1}{2}By - \frac{1}{2}By_1 + x_1x + \frac{1}{2}Ax - \frac{1}{2}Ax_1 = -Ax_1 - By_1 - C$$
$$y_1y + \frac{1}{2}By + \frac{1}{2}By_1 + x_1x + \frac{1}{2}Ax + \frac{1}{2}Ax_1 + C = 0$$
$$x_1x + y_1y + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + C = 0$$

Jadi, persamaan garis singgung yang melalui titik $P(x_1, y_1)$ dan terletak pada lingkaran L: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ adalah

$$\boxed{\mathbf{xx_1 + yy_1 + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + C = 0}}$$

Contoh 4.6

1. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ di titik $(4, -3)$.
2. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ di titik $(-6, 4)$.

Jawab:

1. Titik $(4, -3)$ terletak pada lingkaran sebab $4^2 + (-3)^2 = 25$. Persamaan garis singgung g: $x_1x + y_1y = r^2$ dengan $x_1 = 4$ dan $y_1 = -3$ adalah $4x - 3y = 25$.
2. Titik $(-6, 4)$ terletak pada lingkaran karena $(-6 + 2)^2 + (4 - 1)^2 = 25$. Diketahui $a = -2$ dan $b = 1$ maka persamaan garis singgung
   $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$
   $(x_1 + 2)(x + 2) + (y_1 - 1)(y - 1) = 25$
   Untuk $x_1 = -6$ dan $y_1 = 4$ diperoleh
   $(-6 + 2)(x + 2) + (4 - 1)(y - 1) = 25$
   $-4(x + 2) + 3(y - 1) = 25$
   $-4x - 8 + 3y - 3 = 25$
   $-4x + 3y = 14$

Mari, Cari Tahu

Buatlah kelompok yang terdiri atas 4 orang. Gradien suatu garis lurus biasanya dilambangkan dengan m. Cari informasi di buku lain atau internet, mengapa huruf m yang digunakan? Selidiki pula adakah huruf lain yang digunakan? Tuliskan laporannya dan presentasikan hasil tersebut di depan kelas.

2. Persamaan Garis Singgung Melalui Suatu Titik di Luar Lingkaran

Diketahui titik $P(x_1, y_1)$ berada di luar lingkaran

$L: x^2 + y^2 = r^2$ ... (1)

Misalkan, persamaan garis singgung yang melalui $P(x_1, y_1)$ adalah

$g: y = y_1 + m(x - x_1)$ ...(2).

Jika g menyinggung L di titik Q, Anda dapat menyubstitusikan persamaan (2) ke persamaan (1) sehingga diperoleh persamaan kuadrat dalam x. Selanjutnya, Anda cari diskriminan (D) persamaan kuadrat tersebut. Oleh karena g menyinggung L maka $D = 0$ sehingga nilai-nilai m dapat diperoleh. Apabila nilai m diketahui, Anda dapat menentukan persamaan garis singgung g dengan cara menyubstitusikan m ke persamaan garis g tersebut. Untuk lebih jelasnya, pelajari contoh berikut.

Contoh 4.7

1. Carilah persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang dapat ditarik dari titik (7, –1).
2. Tentukan koordinat-koordinat titik singgung.
3. Tentukan persamaan garis yang menghubungkan titik-titik singgung.

Jawab:

1. Titik P (7, –1) terletak di luar lingkaran. Coba Anda buktikan hal ini.
   Misalkan, persamaan garis singgung yang melalui (7, –1) dengan gradien m adalah
   $y + 1 = m(x - 7)$
   $\Leftrightarrow y = mx - 7m - 1$ ... (1)
   Substitusi (1) ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$, diperoleh
   $x^2 + (mx - 7m - 1)^2 = 25$
   $x^2 + m^2x^2 - 14m^2x - 2mx + 49m^2 + 14m + 1 = 25$
   $(1 + m^2)x^2 - (14m^2 + 2m)x + (49m^2 + 14m - 24) = 0$
   Nilai diskriminan, yaitu
   $D = (14m^2 + 2m)^2 - 4\,(1 + m^2)\,(49m^2 + 14m - 24)$
   $D = 196m^4 + 56m^3 + 4m^2 - 100m^2 - 56m + 96 - 196m^4 - 56m^3$
   $D = -96m^2 - 56m + 96$
   Syarat garis menyinggung lingkaran adalah $D = 0$ sehingga
   $-96m^2 - 56m + 96 = 0$
   atau $12m^2 + 7m - 12 = 0$
   $m = \frac{-7+25}{24} = \frac{3}{4}$ atau $m = \frac{-7+25}{24} = \frac{4}{3}$
   - Untuk $m = \frac{3}{4}$ substitusikan pada persamaan (1) diperoleh persamaan garis singgung: $y = \frac{3}{4}x - 7.\frac{3}{4} - 1 = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$
     atau $4y - 3x + 25 = 0$.
   - Untuk $m = -\frac{4}{3}$ substitusikan pada persamaan (1) diperoleh persamaan garis singgung:
     $y = -\frac{4}{3}x + 7.\frac{4}{3} - 1 = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$ atau $3y + 4x - 25 = 0$.

   Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ di titik (7, –1) adalah
   l: $4y - 3x + 25 = 0$ dan g: $3y + 4x - 25 = 0$.
2. Misalkan, titik A adalah titik singgung garis l: $4y - 3x + 25 = 0$ dengan lingkaran.

Pembahasan Soal

Persamaan garis singgung melalui titik (9, 0) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 36$ adalah ....

Jawab:

Misalkan, persamaan garis singgung
$y - 0 = m(x - 9)$
$y = mx - 9m$
maka
$x^2 + (mx - 9)^2 = 36$
$x^2 + m^2x^2 - 18mx + 81 = 36$
$(1 + m^2)x^2 - 18mx + 45 = 0$
syarat menyinggung:
$(18m)^2 - 4(1 + m^2)(45) = 0$
$324m^2 - 180m^2 - 180 = 0$
$144m^2 = 180$
$m^2 = \frac{5}{4}$
$m = \pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$
$y = \frac{\sqrt{5}}{2}(x - 9)$
$\Rightarrow \sqrt{5}x - 2y = 9\sqrt{5}$
$y = \frac{\sqrt{5}}{2}(x - 9)$
$\Rightarrow \sqrt{5}x - 2y = 9\sqrt{5}$

Soal Ebtanas 1998

$l: 4y - 3x + 25 = 0$ atau $l: y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$.

Substitusi garis l ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ diperoleh

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{25}{3}\right) = 25 \Leftrightarrow x^2 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{75}{8}x + \frac{625}{16} = 25$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{16}x^2 - \frac{75}{8}x + \frac{625}{16} = 25$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 - 150x + 225 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3.$$

Coba Anda substitusikan $x = 3$ pada persamaan garis singgung

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$$

Apakah Anda memperoleh titik singgung A (3, –4)?

Misalkan, titik B adalah titik singgung garis $g: 3y + 4x - 25 = 0$ dengan lingkaran

$g: 3y + 4x - 25 = 0$ atau $g: y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$.

Substitusi garis g ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ diperoleh

$$x^2 + \left(-\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}\right) = 25 \Leftrightarrow x^2 + \frac{16}{9}x^2 - \frac{200}{9}x + \frac{625}{9} = 25$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{9}x^2 - \frac{200}{9}x + \frac{625}{9} = 25$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 - 200x + 400 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

Coba Anda substitusikan $x = 4$ pada persamaan garis singgung

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$$

Apakah Anda memperoleh titik singgung B(4, 3)?

Jadi, koordinat titik singgung adalah A(–3, 4) dan B(4, 3).

3. Persamaan garis yang melalui titik A(–3, 4) dan B(4, 3) diperoleh dengan menggunakan rumus persamaan garis $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ sehingga

$$\frac{y - 4}{3 - 4} = \frac{x + 3}{4 + 3}$$

$$7y - 28 = -x - 3$$

$$x + 7y = 25$$

Persamaan garis yang menghubungkan titik singgung A dan B adalah $x + 7y = 25$.

Tantangan untuk Anda

1. Tunjukkan bahwa persamaan garis $y + 3x + 10 = 0$ adalah garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 20 = 0$. kemudian, tentukan titik singgungnya.
2. Carilah bilangan p yang mungkin sehingga garis $x + y + p = 0$ adalah garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 8$.

3. Persamaan Garis Singgung dengan Gradien Tertentu

Diketahui, persamaan garis dengan gradien m adalah g: $y = mx + n$. Jika titik P terletak pada g dan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ maka

$$x^2 + (mx + n)^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 + m^2x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (m^2 + 1)x^2 + 2mnx + (n^2 - r^2) = 0$$

Syarat nilai diskriminan adalah $D = 0$ karena garis $y = mx + n$ menyinggung lingkaran. Dengan demikian,

$$(2mn)^2 - 4(m^2 + 1)\,(n^2 - r^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow 4m^2n^2 - 4m^2n^2 + 4m^2r^2 - 4n^2 + 4r^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4m^2r^2 - 4n^2 + 4r^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4n^2 = 4m^2r^2 + 4r^2$$
$$\Leftrightarrow n^2 = (m^2 + 1)r^2$$
$$\Leftrightarrow n = r\sqrt{m^2+1} \text{ atau } n = -r\sqrt{m^2+1}$$

Substitusikan nilai n ke persamaan garis $y = mx + n$, diperoleh $y = mx \pm r\sqrt{m^2+1}$.

Persamaan garis singgung lingkaran L: $x^2 + y^2 = r^2$ dengan gradien m adalah

$$\boxed{\boldsymbol{y = mx \pm r\sqrt{m^2+1}}}$$

Anda pun dapat menentukan persamaan garis singgung lingkaran L: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ untuk gradien m dengan titik pusat lingkaran $T(a, b)$ dan jari-jari r, yaitu

$$\boxed{\boldsymbol{(y - b) = m\,(x - a) \pm r\sqrt{m^2+1}}}$$

Bersama teman sebangku, buktikan persamaan tersebut, hasilnya tuliskan dan jelaskan di depan kelas (beberapa siswa saja).

Contoh 4.8

Carilah persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ dengan gradien $m = -1$.

Jawab:

Persamaan garis untuk gradien $m = -1$ adalah $y = (-1)\,x + n$ atau $y = -x + n$. Substitusi persamaan garis ini ke persamaan lingkaran, diperoleh

$$x^2 + (-x + n)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + x^2 - 2nx + n^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2nx + (n^2 - 4) = 0$$

Nilai diskriminan untuk $D = 0$ adalah

$D = 4n^2 - 8(n^2 - 4)$

$\Leftrightarrow 0 = -4n^2 + 32$

$\Leftrightarrow n^2 = 8$

$\Leftrightarrow n = 2\sqrt{2}$ atau $n = -2\sqrt{2}$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran adalah g_1: $y = -x + 2\sqrt{2}$ dan g_2: $y = -x - 2\sqrt{2}$. Coba Anda buat sketsa untuk soal ini.

Contoh 4.9

Carilah persamaan garis singgung pada lingkaran $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$ dengan gradien $m = -1$.

Jawab:

Persamaan lingkaran $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$ mempunyai jari-jari $2\sqrt{2}$.

Persamaan garis singgung pada lingkaran tersebut adalah

$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow y - 3 = (-1)(x - 2) \pm 2\sqrt{2}\sqrt{(-1)^2 + 1}$

$\Leftrightarrow y - 3 = -x + 2 \pm 4$

$\Leftrightarrow y = -x + 5 \pm 4$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah

g_1: $y = -x + 9$ dan

g_2: $y = -x + 1$.

Contoh 4.10

Garis g menghubungkan titik $A(5, 0)$ dan titik $B(10 \cos \theta, 10 \sin \theta)$. Titik P terletak pada AB sehingga $AP : PB = 2 : 3$. Jika θ berubah dari 0 sampai 2π maka titik P bergerak menelusuri suatu lingkaran. Tentukan persamaan lingkaran tersebut.

Jawab:

Langkah ke-1

Menuliskan apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan soal.

Diketahui :
- garis g menghubungkan $A(5, 0)$ dan $B(10 \cos \theta, 10 \sin \theta)$
- $AP : PB = 2 : 3$

Ditanyakan : Persamaan kurva.

Langkah ke-2

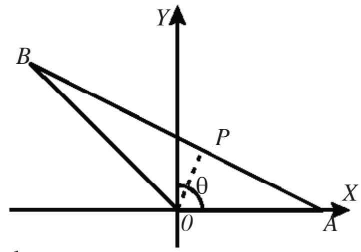
Menentukan konsep yang akan digunakan dalam menjawab soal. Pada soal ini, konsep yang digunakan adalah konsep perbandingan, konsep trigonometri, dan konsep persamaan umum lingkaran.

Langkah ke-3

Menentukan persamaan lingkaran dengan strategi yang telah diketahui.

$A(5, 0)$ dan $B(10 \cos \theta, 10 \sin \theta)$. Titik P pada AB sehingga $AP : PB = 3 : 2$

Amati gambar berikut.



$$OP = OA + \frac{2}{5} AB$$
$$= OA + \frac{2}{5}(OB - OA)$$
$$= \frac{3}{5} OA + \frac{2}{5} OB$$

Persamaan parameter titik P adalah

$x = \frac{3}{5} . 5 + \frac{2}{5} . 10 \cos \theta = 3 + 4 \cos \theta$:

$y = \frac{3}{5} . 0 + \frac{2}{5} . 10 \sin \theta = 4 \sin \theta$.

Dengan demikian, $x = 3 + 4 \cos \theta \Leftrightarrow 4 \cos \theta = x - 3$

$y = 4 \sin \theta \Leftrightarrow 4 \sin \theta = y$

$(4 \cos \theta)^2 + (4 \sin \theta)^2 = (x - 3)^2 + y^2$

$\Leftrightarrow 16 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = x^2 - 6x + 9 + y^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x = 7$

Jadi, persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 - 6x = 7$.

Hal Penting

- lingkaran
- jari- jari
- garis singgung
- gradien

Tes Kompetensi Subbab B

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran
   a. $x^2 + y^2 = 25$ di titik $(-4, -3)$
   b. $x^2 + y^2 - 2x + 8y = 23$ di titik $(3, -10)$
   c. $x^2 + y^2 = 25$ melalui titik $(7, 1)$
   d. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2$ di titik $(4, -2)$
   e. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ dengan gradien $-\frac{3}{4}$
2. Tentukan gradien garis singgung dengan ketentuan berikut.
   a. Sejajar garis $x - y + 2 = 0$.
   b. Tegak lurus garis $2x - y - 5 = 0$.
   c. Sejajar dengan garis yang melalui $(-2,1)$ dan $(3,2)$.
   d. Tegak lurus garis yang melalui $(3,4)$ dan $(-2,-5)$.
   e. Tegak lurus garis yang melalui sumbu koordinat dan membentuk sudut 45° terhadap sumbu-x.
3. Tentukan persamaan garis singgung di titik $(2,1)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 1$.
4. Carilah persamaan lingkaran yang menyinggung sumbu-x dan sumbu-y, dan pusatnya terletak pada garis $3x + 5y = 11$.
5. Carilah persamaan lingkaran yang menyinggung garis $-3x + 4y = 10$ pada titik $(2, 4)$ dan pusatnya terletak pada garis $x + y = 3$.
6. Carilah persamaan lingkaran yang melalui titik-titik A $(2, -1)$ dan B $(4, 3)$ serta menyinggung garis $x + 3y = 3$.
7. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ dengan gradien $m = 1$.
8. Diketahui persamaan lingkaran $(x - 3)^2 + (y + 20)^2 = 8$. Tentukanlah persamaan garis singgung lingkaran tersebut dengan gradien $m = -1$.

Rangkuman

- Persamaan sebuah lingkaran yang berpusat di O(0, 0) dan berjari jari r adalah $x^2 + y^2 = r^2$.
- Persamaan sebuah lingkaran yang berpusat di M (a, b) dan berjari-jari r adalah $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
- Persamaan umum lingkaran adalah $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Sekarang, lanjutkanlah rangkuman di atas.

Refleksi

Setelah Anda mempelajari Bab 4,

1. Anda tuliskan materi-materi yang telah dipahami,
2. tuliskan pula materi yang Anda anggap sulit.

Tes Kompetensi Bab 4

A. Pilihlah salah satu jawaban dan berikan alasannya.

1. Persamaan lingkaran dengan pusat (3,4) dan menyinggung $2x - y + 5 = 0$ adalah ....
a. $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 42$
b. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 49$
c. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = \frac{49}{5}$
d. $(x + 3)^2 - (y + 4)^2 = 49$
e. $(x - 3)^2 - (y - 4)^2 = 42$

2. Diketahui lingkaran L dengan persamaan $x^2 + y^2 = 25$ dan $P(5, 5)$ maka letak titik P adalah ....
a. di dalam lingkaran L
b. di luar lingkaran L
c. pada lingkaran L
d. sejauh 5 satuan dari pusat lingkaran L
e. sejauh $\sqrt{5}$ satuan dari pusat lingkaran L

3. Diketahui lingkaran $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$. Jika M adalah pusat lingkaran dan R adalah jari-jari lingkaran tersebut, koordinat titik M dan panjang R berturut-turut adalah ....
a. (–3, –4) dan 2 **d.** (–3, –4) dan 3
b. (3, 4) dan 2 **e.** (3, 4) dan 3
c. (–3, 4) dan 2

4. Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$ di titik (8, –6) menyinggung lingkaran dengan pusat (4, –8) dan jari-jari R. Nilai R adalah ....
a. 2 **d.** 5
b. 3 **e.** 6
c. 4

5. Lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 4y = p$ akan menyinggung sumbu-x dan sumbu-y jika p sama dengan ....
a. 8 **d.** –4
b. 4 **e.** –8
c. 0

6. Lingkaran $x^2 + y^2 + 2px = 0$ dengan p bilangan real konstan, selalu menyinggung ....
a. sumbu-x saja
b. sumbu-y saja
c. sumbu-x dan sumbu-y
d. garis $x = a$ dan garis $x = -a$
e. garis $y = 2a$ dan garis $y = -2a$

7. Persamaan lingkaran dengan pusat (2, 1) dan melalui (4, –1) adalah ....
a. $x^2 + y^2 - 6x - 3y = 0$
b. $x^2 + 2y^2 -3x -2y -3 = 0$

c. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$
d. $2x^2 + y^2 - 2x - 3y - 1 = 0$
e. $2x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1 = 0$

8. Jika titik $P(0, 3)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 9$, persamaan garis singgung pada lingkaran di titik P adalah ....

a. $y = -2x - 3$
b. $y = -x$
c. $y = 3$
d. $x = 0$
e. $x = -3$

9. Diketahui lingkaran L dengan persamaan $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ dan garis g dengan persamaan $y - x - 1 = 0$ maka ....

a. g tidak memotong L
b. g memotong L di satu titik
c. g memotong L di dua titik
d. g melalui titik pusat L
e. g memotong L dan melalui titik pusat

10. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ di titik $(0, 5)$ adalah ....

a. $y = 5x + 1$
b. $y = 3x - 5$
c. $y = 4x - 3$
d. $y = x + 5$
e. $y = 5$

11. Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - mx + 7y + 4 = 0$ menyinggung sumbu-x maka nilai m adalah ....

a. -16
b. -4
c. 4 atau -4
d. 11 atau 3
e. 16

12. Diketahui lingkaran $x^2 + y^2 = p$ dan garis $x + y - z = 0$. Supaya garis dan lingkaran ini berpotongan di dua titik yang berbeda maka p harus sama dengan ....

a. $\frac{1}{2}$
b. 1
c. 2
d. 3
e. 4

13. Diketahui lingkaran L dengan persamaan $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$. Pernyataan berikut yang benar adalah ....

a. jari-jari $r = 2\sqrt{2}$ $r = 2\sqrt{2}$
b. titik pusat lingkaran $P(-1,3)$
c. lingkaran menyinggung sumbu-y
d. lingkaran menyinggung sumbu-x
e. lingkaran melalui titik (0,0)

14. Supaya persamaan $x^2 + y^2 + 4x + 6y - c = 0$ menyatakan suatu persamaan lingkaran maka c harus memenuhi ....

a. c > 15
b. c < 15
c. c > 14
d. c > 13
e. c < 13

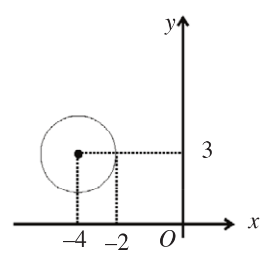
15. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$ di titik $(1, 2)$ adalah ....

a. $x = 1$
b. $x = 2$
c. $y = 1$
d. $y = 2$
e. $y = x$

16. Jika garis $g: x - 2y = 5$ memotong lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 10 = 0$ di titik A dan B, luas segitiga yang dibentuk oleh A, B, dan pusat lingkaran adalah.....

a. $\sqrt{10}$
b. $2\sqrt{5}$
c. 10
d. 5
e. $2\frac{1}{2}$

17. Persamaan lingkaran pada gambar berikut adalah ....

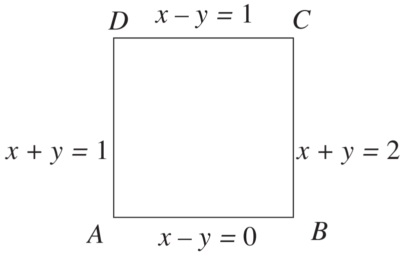


a. $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 21 = 0$
b. $x^2 + y^2 + 8x + 6y - 21 = 0$
c. $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 21 = 0$
d. $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$
e. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$

18. Diketahui lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Lingkaran ini akan menyinggung sumbu-x di titik (0,0) jika dipenuhi ....

a. $A = 0$ dan $B = 1$
b. $A = 0$ dan $B = 0$
c. $A = 0$ dan $C = 0$
d. $A = 0$ dan $C = 1$
e. $A = 0$ dan $C = -1$

19. Persamaan lingkaran yang melalui titik-titik sudut persegi $ABCD$ berikut adalah ....



a. $x^2 + y^2 - 2x - y + 1 = 0$
b. $x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0$
c. $x^2 + y^2 + 2x - y - 1 = 0$
d. $x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0$
e. $x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$

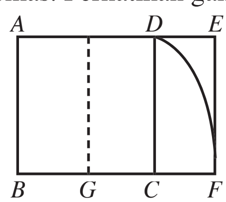
20. Supaya titik (1, 1) terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 - px + 2y + 1 = 0$, nilai p harus sama dengan ....

a. 1 **d.** 4
b. 2 **e.** 3
c. 3

B. Jawablah dengan singkat, tepat dan jelas

1. Carilah persamaan lingkaran yang melalui titik (7, –8) dan (0, 9) dan pusatnya terletak pada garis $x - 2y = 1$.

2. Gedung Parthenon dibangun 440 SM. Gedung tersebut dirancang oleh arsitek Yunani menggunakan perbandingan nisbah emas. Perhatikan gambar berikut.



Pada titik tengah sisi persegi $ABCD$ dibuat busur lingkaran dengan pusat G dan jari-jari GD. Lingkaran tersebut memotong perpanjangan BC di F. Nisbah $BF : AB$ disebut perbandingan nisbah emas. Jika diketahui busur DF memenuhi persamaan

$x^2 + y^2 - 138y - 44 = 0$, berapa perbandingan nisbah emas gedung Parthenon?

(Petunjuk: *perhitungan dibulatkan sampai satu desimal*)

3. Carilah persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang dapat ditarik dari titik (7, –1).

4. Carilah persamaan lingkaran yang melalui (0, 0), jari-jari $\sqrt{5}$ dan pusatnya terletak pada garis $x - y = 1$.

5. Berapakah jarak terdekat dari titik (–7, 2) ke lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + 10x + 14y - 151 = 0$?

Tes Kompetensi Semester 1

A. Pilihlah salah satu jawaban dan berikan alasannya.

1. Rataan hitung dari data berikut adalah ....

Nilai	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11
Frekuensi	1	2	1	3	1	1	2	1	2	1

   a. 4,5   d. 6
   b. 5,0   e. 6,5
   c. 5,5

2. Jika sebuah dadu dan sekeping uang logam ditos satu kali maka peluang tidak muncul angka dan mata dadu bukan 4 adalah ....
   a. $\frac{2}{3}$ d. $\frac{11}{12}$
   b. $\frac{5}{12}$ e. $\frac{1}{3}$
   c. $\frac{7}{12}$

3. Di suatu kelas terdapat 12 laki-laki dan 4 perempuan. Jika tiga orang dipilih secara acak, peluang yang terpilih semuanya laki-laki adalah ....
   a. $\frac{1}{55}$ d. $\frac{11}{5}$
   b. $\frac{1}{3}$ e. $\frac{11}{28}$
   c. $\frac{1}{4}$

4. $\frac{10!}{3!3!4!} = ...$
   a. 3200   d. 4000
   b. 3400   e. 4200
   c. 3800

5. $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = ...$
   a. $n(n - 1)$
   b. n^2
   c. $n(n + 1)$
   d. $n(n + 1)(n + 2)$
   e. $(n - 1)n(n + 1)$

6. Jika terdapat 19 orang yang akan menduduki 19 kursi, banyaknya susunan yang dapat terjadi adalah ....
   a. 16. 17. 18 !   d. 18. 17!
   b. 2 ! 18 !   e. 18. 17. 16!
   c. 19. 18 !

7. $C_{12}^{5} = ...$
   a. 792   d. 2852
   b. 804   e. 4256
   c. 1400

8. Tabel berikut memperlihatkan suatu pengukuran. Jika rata-rata tersebut sama dengan 3 maka harga p adalah ....

x_i	5	3	1	10
f_i	2	3	p	2

   a. 1   d. 8
   b. 4   e. 9
   c. 6

9. Simpangan baku dari data 1, 5, 4, 2, 6, 2, 1, 1, 5, 3 adalah ....
   a. 1,6   d. 2,3
   b. 1,9   e. 2,4
   c. 2,1

10. Jika sebuah dadu dan sekeping mata uang dilempar undi satu kali secara bersamaan, peluang untuk memperoleh GAMBAR pada mata uang dan bilangan ganjil pada dadu adalah ....
   a. $\frac{1}{12}$ d. $\frac{1}{3}$
   b. $\frac{1}{6}$ e. $\frac{1}{2}$
   c. $\frac{1}{4}$

11. 2 sin 45° cos 15° = ...
   a. $-\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1$ d. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$
   b. $-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$ e. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   c. $\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1$

12. Jika $\sin A = \frac{5}{3}$ dikuadran II maka $\cos \frac{1}{2} A = ...$

a. $\frac{5\sqrt{26}}{26}$
b. $\frac{\sqrt{26}}{26}$
c. $\frac{5}{26}$
d. $\frac{5}{12}$
e. $\frac{26}{5}$

13. Jika $\cot 2\theta = -\frac{5}{12}$, 2θ di kuadran II maka $\cos \theta = ...$

a. $\frac{3}{\sqrt{13}}$
b. $\frac{2}{\sqrt{13}}$
c. $\frac{3}{2}$
d. $\frac{2}{3}$
e. $\frac{4}{\sqrt{13}}$

14. Amplitudo fungsi $\sqrt{3}\cos x$ adalah ....

a. $\sqrt{3}$
b. $\sqrt{3} + 1$
c. 2
d. $2\sqrt{3}$
e. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

15. Jika $\tan \theta = -\frac{3}{4}$ dan θ di kuadran II, nilai $\cos 2\theta - \sin (90° + \theta)$ adalah ....

a. $\frac{7}{25}$
b. $\frac{25}{7}$
c. $\frac{27}{25}$
d. $\frac{27}{25}$
e. $\frac{27}{5}$

16. Jika $\cos 24° = p$ maka $\cos 48° = ...$

a. $2p\sqrt{1-p^2}$
b. $2p^2 + 1$
c. $2p$
d. $2p^2 - 1$
e. $\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$

17. $\frac{\tan 140° + \tan 70°}{1 - \tan 140° \tan 70°} = ...$

a. $-\sqrt{3}$
b. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
c. $\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$
d. $\sqrt{3}$
e. $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

18. $\cos^4 50° - \sin^4 50° = ...$

a. cos 100°
b. sin 100°
c. 0
d. 1
e. –1

19. Himpunan penyelesaian dari $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$ dengan $0 \leq \theta \leq 360°$ adalah ....

a. {30°, 150°}
b. {30°, 150°, 210°, 330°}
c. {15°, 75}
d. {15°, 75°, 195°, 225°}
e. {60°, 300°}

20. Dalam sebuah kantong terdapat 11 kelereng merah dan 7 kelereng putih. Dua kelereng diambil sekaligus secara acak. Peluang terambilnya dua kelereng merah adalah ....

a. $\frac{1}{4}$
b. $\frac{5}{18}$
c. $\frac{11}{36}$
d. $\frac{1}{2}$
e. $\frac{10}{18}$

21. Berikut ini adalah tabel distribusi frekuensi dari berat badan sekelompok siswa SMA. Median dari data ini adalah ....

Berat Badan	Frekuensi
41 – 45	2
46 – 50	6
51 – 55	15
56 – 60	11
61 – 65	6

a. 53,50 kg
b. 54,50 kg
c. 55,30 kg
d. 55,40 kg
e. 55,50 kg

22. Simpangan baku dari data 5, 7, 3, 4, 6, 8, 2, 5 adalah ....
   a. 1
   b. 1,5
   c. 2
   d. 2,5
   e. 3

23. Empat buah buku disusun dalam satu rak buku. Banyaknya cara untuk menyusun keempat buku tersebut agar salah satu buku selalu diletakkan paling tepi ada ... cara.
   a. 4
   b. 6
   c. 8
   d. 12
   e. 24

24. Sebuah kantong berisi 11 bola yang terdiri atas 5 bola kuning dan 6 bola hijau. Jika diambil 2 bola sekaligus, peluang terambilnya 2 bola berwarna hijau adalah ....
   a. $\frac{2}{11}$
   b. $\frac{3}{11}$
   c. $\frac{1}{3}$
   d. $\frac{6}{11}$
   e. $\frac{3}{5}$

25. Simpangan kuartil dari data berikut adalah ....

Nilai	Frekuensi
1 – 10	2
11 – 20	4
21 – 30	25
31 – 40	47
41 – 50	17
51 – 60	5

   a. 1,2
   b. 2,5
   c. 3,4
   d. 4,8
   e. 5,9

26. Diketahui empat angka 4, 5, 6, dan 7. Banyaknya cara untuk menyusun bilangan-bilangan yang terdiri atas empat angka dengan syarat bahwa bilangan-bilangan itu tidak mempunyai angka yang sama adalah ... cara.
   a. 8
   b. 12
   c. 16
   d. 18
   e. 24

27. Dua buah dadu bermata enam ditos satu kali secara bersamaan. Peluang munculnya jumlah mata dadu 5 atau mata dadu 10 adalah ....
   a. $\frac{11}{36}$
   b. $\frac{10}{36}$
   c. $\frac{9}{36}$
   d. $\frac{8}{36}$
   e. $\frac{7}{36}$

28. Modus dari berat badan pada tabel berikut adalah ....

Berat Badan	Frekuensi
50 – 52	5
53 – 55	17
56 – 58	14
59 – 61	10
62 – 64	4

   a. 55,5 kg
   b. 54,9 kg
   c. 54,7 kg
   d. 53,9 kg
   e. 52,5 kg

29. Simpangan kuartil dari data 3, 8, 2, 7, 7, 10, 2, 9, 5, 4, 4, 6, 4, 7, 5, 7 adalah ....
   a. 5,5
   b. 3
   c. 2
   d. 1,5
   e. 1

30. Ada 4 jalan yang menghubungkan kota A dengan kota B dan ada 6 jalan yang menghubungkan kota B dengan kota C. Banyaknya perjalanan yang dapat ditempuh dari kota A ke kota C melalui B adalah ....
   a. 10
   b. 20
   c. 24
   d. 30
   e. 36

B. Jawablah dengan singkat, tepat dan jelas.

1. Hitunglah mean, modus, dan median dari data-data berikut.

a. 4, 6, 7, 3, 4, 5, 6, 8, 5, 5

b. 16, 15, 12, 11, 15, 17, 10

c. 52, 70, 62, 46, 50, 65, 55, 78

d. 5, 2; 3, 5; 4, 1; 7, 3; 6, 6; 9, 1

2. Hitung n dari persamaan berikut.

a. $5\ p(n, 3) = 4\ p(n + 1,3)$

b. $p(n, 5) = 18\ p(n - 2,4)$

c. $c(n, 13) = c(n\ , 11)$

3. Sebuah kantong berisi 9 kelereng biru, 6 kelereng kuning, dan 4 kelereng merah. Sebuah kelereng diambil secara acak dari kantong. Tentukan peluang terambil kelereng biru atau kuning.

4. Diketahui $x = \cos p + \sin p$ dan $y = \cos p - \sin p$

a. Tentukan $x^2 + y^2$.

b. Tunjukkan bahwa $x^2 - y^2 = 2 \sin 2p$.

5. Diketaui persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 2y + c = 0$ melalui titik A(5, –1).

a. Tentukan jari-jari lingkaran.

b. Tentukan pusat lingkaran.

Bab 5

Suku Banyak

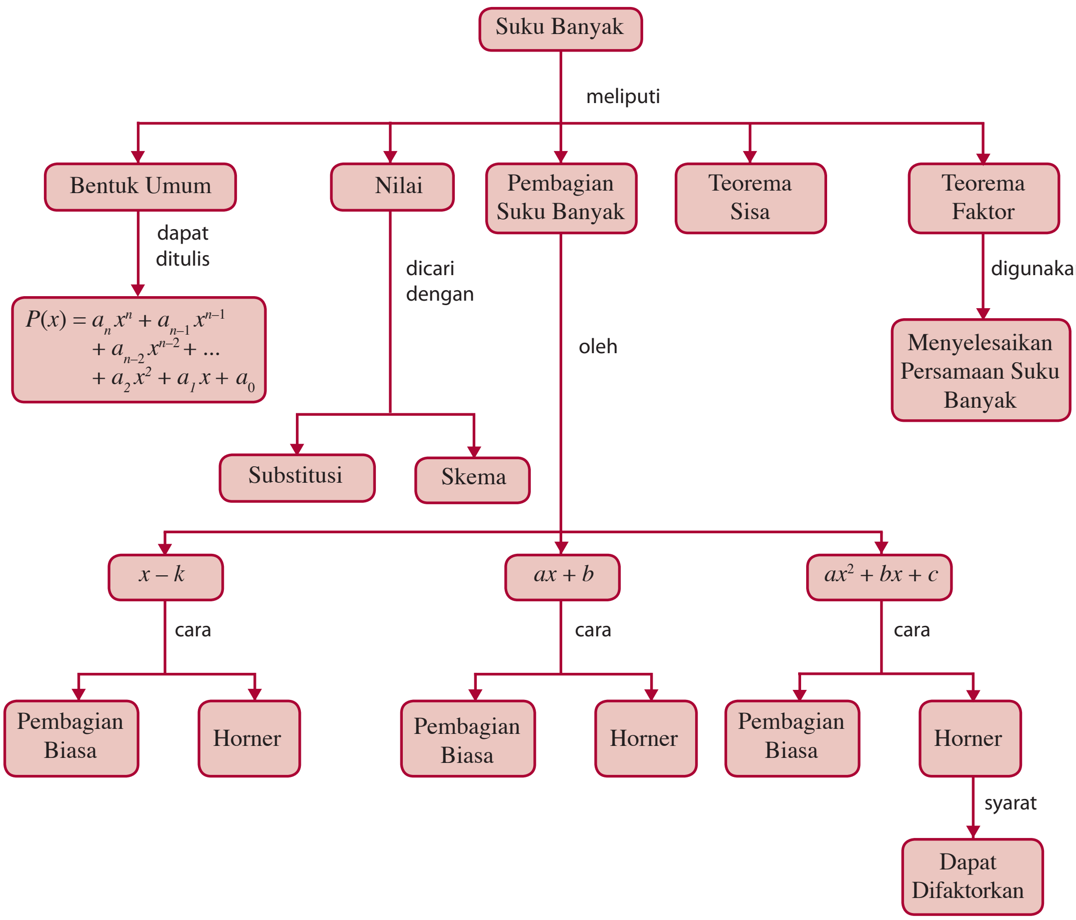
Setelah mempelajari bab ini, Anda harus mampu menggunakan konsep, sifat, dan aturan fungsi komposisi dalam pemecahan masalah; menggunakan konsep, sifat, dan aturan fungsi invers dalam pemecahan masalah.

Anda telah mempelajari beberapa fungsi aljabar di SMP, misalnya fungsi $y = x^2 - 1$. Fungsi $y = x^2 - 1$ merupakan fungsi suku banyak. Pada bab ini konsep, tersebut akan dikembangkan sehingga Anda akan mempelajari bagaimana menjabarkan suku banyak menjadi perkalian beberapa suku banyak. Cara menjabarkan suku banyak tersebut akan Anda pelajari pada bab ini. Salah satu manfaat mempelajari bab ini untuk menyelesaikan masalah berikut.

Hubungan antara jarak yang ditempuh $x(t)$ dan waktu yang dibutuhkan (t) untuk gerak sebuah mobil dinyatakan oleh $x(t) = 48t^2 - 3t$. Dalam hal ini, $x(t)$ dalam meter dan t dalam menit. Dengan menggunakan konsep suku banyak, Anda dapat menghitung jarak mobil setelah bergerak 5 menit.

Diagram Alur

Untuk mempermudah Anda dalam mempelajari bab ini, pelajarilah diagram alur yang disajikan sebagai berikut.



Tes Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

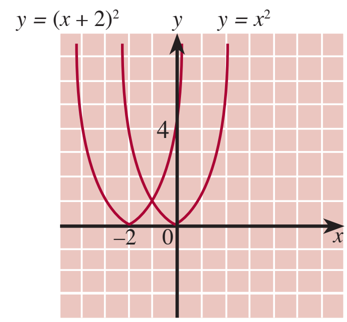
1. Tentukan penyelesaian persamaan kuadrat berikut dengan cara pemfaktoran dan menggunakan rumus *abc*.
   a. $x^2 - 6x + 8 = 0$
   b. $2x^2 - 4 = 3x$
2. Diketahui fungsi kuadrat $f(x) = 4x - x^2$. Tentukan nilai $f(-2)$, $f(-1)$, $f(a)$, dan $f\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. Selesaikan soal berikut dengan menggunakan cara pembagian bersusun. Jelaskan pula langkah-langkah yang Anda lakukan pada pembagian ini.
   a. $18 \overline{)272}$ **b.** $26 \overline{)479}$
4. Hitunglah $(x - 3)(x + 1)(x + 2)$.
5. Hitunglah $(2x + 3)(3x^3 - x^2 + 5x - 1)$.

A. Pengertian Suku Banyak

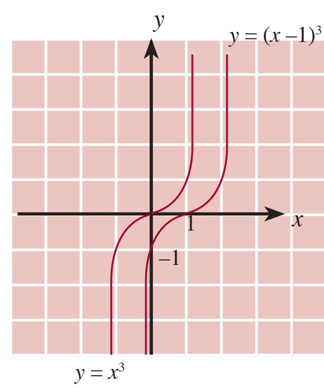
1. Suku Banyak, Derajat Suku Banyak, Koefisien Suku Banyak, dan Suku Tetap

Anda telah memahami bahwa grafik $y = (x + 2)^2$ diperoleh dengan cara menggeser grafik $y = x^2$ sejauh 2 satuan ke kiri, seperti diperlihatkan pada Gambar 5.1.

Adapun grafik $y = (x - 1)^3$ diperoleh dari grafik $y = x^3$ dengan cara menggeser grafik dari $y = x^3$ sejauh 1 satuan ke kanan seperti diperlihatkan pada Gambar 5.2.



Gambar 5.1



Gambar 5.2

Amati keempat persamaan berikut.

$y = x^2$

$y = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$

$y = x^3$

$y = (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Ruas kanan keempat persamaan itu merupakan suku banyak dalam peubah (variabel) x. Suku banyak $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ terdiri atas empat suku, yaitu suku ke-1 adalah x^3, suku ke-2 adalah $-3x^2$, suku ke-3 adalah $3x$, dan suku ke-4 adalah -1.

Derajat suatu suku banyak ditentukan oleh pangkat tertinggi dari variabel pada suku banyak tersebut. Jadi, derajat dari suku banyak $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ adalah 3. Koefisien suku banyak dari x^3, x^2, dan x berturut-turut adalah 1, –3, dan 3. Adapun –1 dinamakan suku tetap (konstanta).

Dari uraian tersebut, dapatkah Anda menyatakan suku banyak berderajat n? Cobalah nyatakan suku banyak derajat n secara umum.

Secara umum, suku banyak dalam peubah x berderajat n ditulis sebagai berikut.

$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$
Cara penyusunan suku banyak berdasarkan pangkat x yang berkurang dengan $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ adalah *koefisien-koefisien suku banyak* yang merupakan konstanta real dan $a_n \neq 0$.
a_0 = *suku tetap* yang merupakan konstanta real
n = *derajat suku banyak* dan n adalah bilanga cacah

2. Penjumlahan, Pengurangan, dan Perkalian Suku Banyak

Diketahui, $f(x) = -3x^3 - x^2 + 2x$ dan $g(x) = x^8 + 2x^5 - 15x^2 + 6x + 4$.

- Penjumlahan suku banyak $f(x)$ dengan $g(x)$ adalah
$$f(x) + g(x) = (-3x^3 - x^2 + 2x) + (x^8 + 2x^5 - 15x^2 + 6x + 4)$$
$$= x^8 + 2x^5 - 3x^3 - 16x^2 + 8x + 4$$
- Pengurangan suku banyak $f(x)$ dengan suku banyak $g(x)$ adalah
$$f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$$
$$= (-3x^3 - x^2 + 2x) + (-x^8 - 2x^5 + 15x^2 - 6x - 4)$$
$$= -x^8 - 2x^5 - 3x^3 + 14x^2 - 4x - 4$$
- Perkalian suku banyak $f(x)$ dengan suku banyak $g(x)$ adalah
$$f(x) \times g(x) = (-3x^3 - x^2 + 2x)(x^8 + 2x^5 - 15x^2 + 6x + 4)$$
$$= -3x^{11} - 6x^8 + 45x^5 - 18x^4 - 12x^3 - x^{10} - 2x^7 + 15x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 2x^9 + 4x^6 - 30x^3 + 12x^2 + 8x$$
$$= -3x^{11} - x^{10} + 2x^9 - 6x^8 - 2x^7 + 4x^6 + 45x^5 - 3x^4 - 48x^3$$

Cobalah Anda tentukan $g(x) - f(x)$ dan $g(x) \times f(x)$.
Apakah $f(x) - g(x) = g(x) - f(x)$?
Apakah $f(x) \times g(x) = g(x) \times f(x)$?
Jelaskan dengan kata-kata Anda sendiri, kemudian bacakan di depan kelas.

Ingatlah

Misalkan, $f(x)$ suku banyak berderajat m dan $g(x)$ suku banyak berderajat n,
- $f(x) + g(x)$ adalah suku banyak yang derajatnya adalah maksimum m atau n.
- $f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$ adalah suku banyak berderajat maksimum m atau n.
- $f(x) \times g(x)$ adalah suku banyak berderajat tepat sama dengan $(m + n)$.

Contoh 5.1

Diketahui suku banyak $f(x)$ dan $g(x)$ sebagai berikut.
$f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 6$
$g(x) = 2x^2 - 7x + 10$
Tentukan

a. $f(x) + g(x)$ **b.** $f(x) - g(x)$
c. $f(x) \times g(x)$

Jawab:

a. $f(x) + g(x) = (2x^4 - 3x^2 + 5x - 6) + (2x^2 - 7x + 10)$
$= 2x^4 - x^2 - 2x + 4$

b. $f(x) - g(x) = (2x^4 - 3x^2 + 5x - 6) - (2x^2 - 7x + 10)$
$= 2x^4 - 5x^2 + 12x - 16$

c. $f(x) \times g(x) = (2x^4 - 3x^2 + 5x - 6) - (2x^2 - 7x + 10)$
$= 2x^4(2x^2 - 7x + 10) - 3x^2(2x^2 - 7x + 10) + 5x(2x^2 - 7x + 10) - 6(2x^2 - 7x + 10)$
$= 4x^6 - 14x^5 + 20x^4 - 6x^4 + 21x^3 - 30x^2 + 10x^3 - 35x^2 + 50x - 12x^2 + 42x - 60$
$= 4x^6 - 14x^5 + 14x^4 + 31x^3 - 77x^2 + 92x - 60$

Tes Kompetensi Subbab A

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Diketahui suku banyak
   $3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 7x + 15$.

   Tentukanlah:

   a. derajat suku banyak
   b. koefisien x
   c. koefisien x^2
   d. koefisien x^3
   e. koefisien x^4
   f. suku tetap

2. Diketahui $f(x) = -2x^3$, $g(x) = 3x^2 - 5x$, dan $h(x) = 4 - 3x$. Hitunglah:

   a. $f(x) \cdot g(x)$
   b. $f(x) \cdot \{g(x) + h(x)\}$
   c. $f(x) \cdot \{g(x) - h(x)\}$
   d. $\{f(x) + g(x)\} \cdot h(x)$
   e. $\{f(x) - g(x)\} \cdot h(x)$

B. Menentukan Nilai Suku Banyak

1. Cara Substitusi

Anda dapat menentukan nilai $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ untuk $x = \left(\frac{2}{\pi}\right)$ dan $x = \left(\frac{2}{2\pi}\right)$, yaitu

$$g\left(\frac{2}{\pi}\right) = \sin\left(\frac{1}{2/\pi}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$g\left(\frac{2}{2\pi}\right) = \sin\left(\frac{1}{2/2\pi}\right) = \sin\pi = 0.$$

Akan tetapi, Anda akan mengalami kesulitan jika harus menentukan $g(\pi) = \sin\frac{1}{\pi}$ karena $\frac{1}{\pi}$ bukan merupakan sudut istimewa.

Lain halnya dengan fungsi suku banyak, berapa pun nilai yang diberikan pada peubahnya, Anda dengan mudah dapat menentukan nilai suku banyak itu.

Diketahui, suku banyak $P(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 6$ maka

- untuk $x = 1$, diperoleh $P(1) = 3(1)^4 - 2(1)^2 + 5(1) - 6 = 0$
- untuk $x = -1$, diperoleh $P(-1) = -10$
- untuk $x = 0$, diperoleh $= -6$
- untuk $x + 2 = 0$ atau $x = -2$, diperoleh $P(-2) = 24$
- untuk $x - 2 = 0$ atau $x = 2$, diperoleh $P(2) = 44$

Kemudian, misalkan suku banyak $P(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2$ maka

- untuk $x = k + 1$, diperoleh
  $P(k + 1) = 5(k + 1)^3 + 4(k + 1)^2 - 3(k + 1) - 2$
  $= 5k^3 + 19k^2 + 20k + 4$

Tokoh Matematika

Girolarmo Cardano (1501–1576)

Girolarmo Cardano menerbitkan solusi persamaan kubik (suku banyak berderajat tiga) dalam buku yang berjudul *Ars Magna* (1545).

Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*, 2002

- untuk $x = k - 1$, diperoleh
  $P(k-1) = 5(k-1)^3 + 4(k-1)^2 - 3(k-1) - 2$
  $= 5k^3 - 11k^2 + 4k$
- untuk $x = -k$
  $P(-k) = -5k^3 + 4k^2 + 3k - 2$
- untuk $x = -k + 1$, diperoleh
  $P(-k+1) = -5k^3 + 19k^2 - 20k + 4$

Dari uraian tersebut, dapatkah Anda menduga rumus menentukan nilai suku banyak? Cobalah nyatakan rumus tersebut dengan kata-kata Anda sendiri. Konsep yang telah Anda pelajari tersebut memperjelas ketentuan berikut.

Nilai suku banyak $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, untuk $x = k$ di mana k suatu bilangan real adalah:
$P(k) = a_nk^n + a_{n-1}k^{n-1} + a_{n-2}k^{n-2} + \ldots + a_2k^2 + a_1k + a_0$

2. Cara Skema

Untuk menentukan nilai dari suatu suku banyak dengan nilai tertentu bagi peubahnya akan lebih mudah jika Anda menggunakan cara skema dibandingkan dengan cara substitusi. Agar lebih jelas, pelajari uraian berikut.

Diketahui, $P(x) = 3x^4 + 2x^2 - 5x + 6$

$P(x)$ dapat pula disusun sebagai berikut.

$P(x) = 3x^4 + 2x^2 - 5x + 6$
$= 3x^4 + 0x^3 + 2x^2 - 5x + 6$
$= (3x^3 + 0x^2 + 2x - 5)\,x + 6$
$= [(3x^2 + 0x + 2)\,x - 5]\,x + 6$
$= [[(3x + 0)x + 2]\,x - 5]\,x + 6$ …(1)

Jika nilai $x = 2$ disubstitusikan pada persamaan (1) maka $P(2)$ secara bertahap diperoleh sebagai berikut.

$P(x) = [[(3x + 0)x + 2]\,x - 5]x + 6$
$P(2) = [[(3 \cdot 2 + 0)2 + 2]2 - 5]2 + 6 = [(6 \cdot 2 + 2)2 - 5]2 + 6$
$= (14 \cdot 2 - 5)\,2 + 6 = 23 \cdot 2 + 6 = 52$

Mari menganalisis proses pada perhitungan tersebut.

- Langkah ke-1 menghitung $3 \cdot 2 + 0 = 6$
- Langkah ke-2 menghitung $6 \cdot 2 + 2 = 14$
- Langkah ke-3 menghitung $14 \cdot 2 - 5 = 23$
- Langkah ke-4 menghitung $23 \cdot 2 + 6 = 52$

Langkah-langkah itu dapat disajikan dalam bagan (skema) sebagai berikut.

Perhitungan untuk memperoleh $P(2)$ dapat disajikan melalui skema berikut. Namun, amatilah bahwa ada dua operasi dalam proses ini, yaitu perkalian dan penjumlahan.

- Nilai $x = 2$ dituliskan pada baris pertama skema, kemudian diikuti oleh koefisien setiap suku dari pangkat tertinggi ke terendah dan suku tetap.
- Operasi aljabar pada skema tersebut adalah perkalian dan penjumlahan.
- Tanda panah menyatakan "kalikan dengan nilai $x = 2$".

$x = 2$	3	0	2	–5	6	
		⊕	⊕	⊕	⊕	
		3(2)	6(2)	14(2)	23(2)	
	3	6	14	23	52	→ $P(2)$

Tantangan untuk Anda

Apakah fungsi-fungsi berikut merupakan fungsi polinom atau bukan? Sebutkan alasannya.

a. $P(x) = 3x^3 - 2$

b. $P(x) = 0$

c. $P(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

d. $P(x) = 10$

e. $P(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

Secara umum, perhitungan nilai suku banyak
$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$
untuk $x = k$ menggunakan cara skema, diperlihatkan pada Gambar 5.3.
dengan:

$$
\begin{aligned}
A_n &= a_n\\
A_{n-1} &= A_n(k) + a_{n-1}\\
A_{n-2} &= A_{n-1}(k) + a_{n-2}\\
&\vdots\\
A_2 &= A_3(k) + a_2\\
A_1 &= A_2(k) + a_1\\
A_0 &= A_1(k) + a_0
\end{aligned}
$$

$x = k$	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_0	a_0	
		⊕	⊕		⊕	⊕	⊕	
		$A_n(k)$	$A_{n-1}(k)$		$A_3(k)$	$A_2(k)$	$A_1(k)$	
	A_n	A_{n-1}	A_{n-2}	...	A_2	A_1	A_0	→ $P(k)$

Gambar 5.3
Skema proses perhitungan $P(k)$.

Cara menghitung nilai suku banyak dengan menggunakan skema ini merupakan dasar untuk melakukan pembagian suku banyak dengan cara Horner (W. G. Horner 1786–1837).

Contoh 5.2

1. Hitunglah nilai $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 4x - 2$ untuk $x = -6$ menggunakan cara skema.

2. Suku banyak $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - px + 10$, untuk $x = 2$ adalah $f(2) = 38$. Berapakah nilai p?

Jawab:

1. $x = -6$

$x = -6$	2	-4	0	4	-2
		$2(-6)$	$-16\ (-6)$	$96\ (-6)$	$-572\ (-6)$
	2	-16	96	-572	3.430

Jadi, $f(-6) = 3.430$.

2. $x = 2$

$x = 2$	2	-3	2	0	$-p$	10
		$2(2)$	$1(2)$	$4(2)$	$8(2)$	$32 - 2p$
	2	1	4	8	$16 - p$	$42 - 2p$

$f(2) = 38$
$f(2) = 42 - 2p$
$\Leftrightarrow 38 = 42 - 2p$
$\Leftrightarrow 2p = 4$
$\Leftrightarrow p = 2$

Tes Kompetensi Subbab B

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Tentukan nilai p jika diketahui suku banyak $f(x)$ dan nilai $f(x)$ sebagai berikut.
   a. $f(x) = 3x^5 + 6x^4 - px^3 + 10x - 5$ dan $f(-2) = 39$
   b. $f(x) = x^7 - px^5 + 2x^4 + px^3 - 2x + 1$ dan $f(-2) = 5$
2. Hubungan antara jarak yang ditempuh $x(t)$ dan waktu yang dibutuhkan (t) untuk gerak sebuah mobil dinyatakan oleh $x(t) = 48t^2 - 3t$. Dalam hal ini $x(t)$ dalam meter dan t dalam menit.
   a. Tentukanlah: $x(2)$
   b. Hitunglah jarak mobil setelah bergerak 5 menit dihitung dari titik asal.
3. Jika suku banyak $2x^3 - 9x^2 - 8x + 11 = (Ax + B)(x - 5)(x - 1) + C$, tentukan nilai A, B, dan C.
4. Jika $\dfrac{5x^2 - 4x - 3}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = \dfrac{A}{x - 3} + \dfrac{Bx + C}{(x-1)(x+2)}$, tentukan nilai A, B, dan C.
5. Data berikut menampilkan biaya (C) per minggu untuk mencetak buku sebanyak x buah (dalam ribuan).

Banyak Buku (x)	Biaya (C)
0	100
5	128,1
10	144
13	153,5
17	161,2
18	162,6
20	166,3
23	178,9
25	190,2
27	221,8

   a. Carilah selisih biaya mencetak 10.000 buku dan 13.000 buku.
   b. Data tersebut dapat dimodelkan oleh fungsi
   $C(x) = 0{,}015x^3 - 0{,}595x^2 + 9{,}15x + 98{,}43$
   Dengan menggunakan fungsi ini, prediksikan biaya mencetak 22.000 buku per minggu.

C. Pembagian Suku Banyak

1. Pengertian Pembagi, Hasil Bagi, dan Sisa Pembagian

Masih ingatkah Anda dengan pembagian bersusun pada bilangan bulat? Jika ya, coba tentukan pembagian 156 oleh 8. Proses pembagian suku banyak pun mempunyai proses yang hampir sama dengan pembagian bilangan bulat. Untuk mengetahui hasil bagi dan sisa pembagian suku banyak, Anda perlu menguraikan suku banyak menjadi perkalian beberapa suku banyak. Agar lebih jelasnya, pelajari uraian berikut.

Amati perkalian-perkalian berikut.

a. $(x + 1)(x + 2)(2x - 3) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 3)$
$= 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$

b. $(x - 1)(x^3 - 3) = x^4 - x^3 - 3x + 3$

Amatilah proses perkalian tersebut dengan saksama. Dari perkalian $(x + 1)(x + 2)(2x - 3)$, dihasilkan suatu suku banyak $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$. Dengan kata lain, jika diberikan atau diketahui suatu suku banyak, dapatlah suku banyak itu difaktorkan. Dengan demikian, Anda dapat lebih mudah melakukan pembagian terhadap suatu suku banyak.

Diketahui, $P(x) = x^3 - 7x^2 + 4x + 50$ adalah suku banyak berderajat 3.

Pembagian $P(x)$ oleh $x - 3$ dengan cara pembagian biasa adalah sebagai berikut.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4x - 8 \\ \cline{2-2}
x - 3 & x^3 - 7x^2 + 4x + 50 \\
 & \underline{x^3 - 3x^2} \quad - \\
 & \quad -4x^2 + 4x \\
 & \quad \underline{-4x^2 + 12x} \quad - \\
 & \qquad\quad -8x + 50 \\
 & \qquad\quad \underline{-8x + 24} \quad - \\
 & \qquad\qquad\quad 26
\end{array}
$$

Coba Anda jelaskan langkah-langkah yang dilakukan dalam pembagian tersebut. $(x - 3)$ adalah pembagi dari $P(x)$, sedangkan hasil bagi dari $P(x)$ adalah $x^2 - 4x - 8$ dan sisa pembagiannya adalah 26.

Jadi, $(x^3 - 7x^2 + 4x + 50) : (x - 3) = x^2 - 4x - 8$ dengan sisa 26. Akibatnya, suku banyak $P(x)$ dapat ditulis sebagai

$x^3 - 7x^2 + 4x + 50 = (x - 3)(x^2 - 4x - 8) + 26$ atau

$P(x) = (x - 3) \times H(x) + \text{sisa} \ldots$ (i),

Informasi untuk Anda

Informations for You

Ada beberapa lambang yang digunakan untuk pembagian. Lambang yang paling umum digunakan adalah seperti tanda kurung dengan garis horizontal pada bagian atasnya $\left(\overline{)\;}\right)$. Tanda kurung diperkenalkan pada awal tahun 1500. Beberapa waktu kemudian, tanda garis horizontal ditambahkan. Adapun lambang " : " (disebut *obelus*) kali pertama digunakan sebagai pembagi sekitar tahun 1650. Lambang tersebut diperkenalkan oleh Matematikawan Inggris, John Pell.

There are several different symbol names used or associated with division. The most common looks like a close parenthesis with a horizontal bar extending to the right at the top. The parenthesis was introduced in the early 1500's and over time the bar was added, but when it first occurred is unclear. The symbol "÷" is called an obelus, and was first used for a division symbol around 1650. The invention is often credited to British Mathematician John Pell.

Sumber: *www.DrMath.com*

dengan $H(x) = x^2 - 4x - 8$ dan sisa = 26.

Jika nilai $x = 3$ disubstitusikan pada persamaan (i), diperoleh

$P(3) = (3 - 3) \times H(3) + \text{sisa} = 0 \times H(3) + \text{sisa} = \text{sisa}$

Jadi, sisa pembagian oleh $(x - 3)$ terhadap $P(x)$ adalah $P(3)$.

Dari uraian tersebut, dapatkah Anda menduga bentuk umum pembagian suku banyak? Cobalah nyatakan bentuk tersebut dengan kata-kata Anda sendiri. Konsep pembagian suku banyak yang telah Anda pelajari tersebut memperjelas ketentuan berikut.

Sisa pembagian oleh $(x - k)$ terhadap $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ adalah $P(k)$ atau $P(x) = (x - k)\,H(x) + \text{sisa}$ dengan sisa = $P(k)$.

Soal Terbuka

Jelaskan dengan kata-kata Anda sendiri cara pembagian suatu suku banyak *P(x)* oleh *(x – k)* dengan menggunakan cara Horner.

Contoh 5.3

Tentukan sisa pembagian untuk suku banyak $(3x^4 + 2x^2 + 5x - 1) : (x - 1)$.

Jawab:

Sisa = $P(1) = 3.1^4 + 2.1^2 + 5.1 - 1 = 9$.

2. Pembagian Suku Banyak dengan Cara Horner

a. Pembagian Suku Banyak dengan (*x – k*)

Anda telah mengetahui $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ dibagi $(x - k)$ hasil baginya adalah $H(x)$ dan sisanya $P(k)$. Secara matematis, ditulis $P(x) = (x - k)H(x) + \text{sisa}$, dengan sisa = $A_0 = P(k)$.

Diketahui $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ dan $(x - k)$ adalah pembagi $P(x)$. Oleh karena $P(x)$ berderajat 3 dan $(x - k)$ berderajat 1 maka derajat $H(x)$ adalah $(3 - 1) = 2$ dan derajat sisa adalah $(1 - 1) = 0$.

Diketahui, $H(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ dan sisa = A_0 maka suku banyak $P(x)$ dapat ditulis

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - k)(b_2x^2 + b_1x + b_0) + A_0$$

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = b_2x^3 + (b_1 - b_2k)x^2 + (b_0 - b_1k)x + (A_0 - b_0k)$$

nilai koefisien sama

Berdasarkan kesamaan suku banyak tersebut (pada kedua ruas), Anda dapat menentukan nilai b_2, b_1, b_0, dan A_0 dengan langkah-langkah sebagai berikut.

- Langkah ke-1: $b_2 = a_3$
- Langkah ke-2: $b_1 - b_2k = a_2 \rightarrow b_1 = a_2 + b_2k = a_2 + a_3k$
- Langkah ke-3: $b_0 - b_1k = a_1 \rightarrow b_0 = a_1 + b_1k = a_1 + (a_2 + a_3k)k$
  $= a_1 + a_2k + a_3k^2$
- Langkah ke-4: $A_0 - b_0k = a_0 \rightarrow A_0 = a_0 + b_0k$
  $= a_0 + (a_1 + a_2k + a_3k^2)k$
  $= a_0 + a_1k + a_2k^2 + a_3k^3.$

Proses perhitungan nilai b_2, b_1, b_0, dan A_0 dapat disajikan dalam skema berikut.

$x = k$	a_3	a_2	a_1	a_0
		+	+	+
		a_3k	$(a_2+a_3k)k$	$(a_1+a_2k+a_3k^2)k$
	a_3	a_2+a_3k	$a_1+a_2k+a_3k^2$	$a_0+a_1k+a_2k^2+a_3k^3$
	↓	↓	↓	↓
	b_2	b_1	b_0	A_0

Contoh 5.4

1. Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian dari $(4x^3 - 10x^2 + 14x - 15) : (x - 5)$ menggunakan cara Horner.
2. Jika fungsi suku banyak $P(x) = 6x^5 + 41x^4 + 97x^3 + px^2 + 41x + 6$ habis dibagi dengan $(x - 3)$, tentukan nilai p.

Jawab:

1.

$x = 5$	4	–10	14	–15
		+	+	+
		20	50	320
	4	10	64	305

Jadi, hasil bagi dari $(4x^3 - 10x^2 + 14x - 15)$ oleh $(x - 5)$ adalah $4x^2 + 10x + 64$ dan sisanya adalah 305.

2.

$x = 3$	6	41	97	p	41	6
		+	+	+	+	+
		18	177	822	$2.466 + 3p$	$7.521 + 9p$
	6	59	274	$822 + p$	$2.507 + 3p$	$7.527 + 9p$

$P(x) = 6x^5 + 41x^4 + 97x^3 + px^2 + 41x + 6$ habis dibagi dengan $(x - 3)$ maka sisa pembagiannya sama dengan nol sehingga $7.527 + 9p = 0$

$\Leftrightarrow 9p = -7.527$

$\Leftrightarrow p = -836\frac{1}{3}$

b. Pembagian Suku Banyak dengan (*ax* + *b*)

Untuk menentukan hasil bagi dan sisa pembagian suku banyak $(x^3 - 2x^2 + 3x - 5) : (2x + 3)$, terlebih dahulu Anda harus menuliskan bentuk $(2x + 3)$ menjadi $2(x + \frac{3}{2})$.

Dengan demikian,

$$(x^3 - 2x^2 + 3x - 5) : (2x + 3) = (x^3 - 2x^2 + 3x - 5) : 2(x + \frac{3}{2}).$$

Dengan menggunakan cara Horner untuk $x = -\frac{3}{2}$, diperoleh skema sebagai berikut.

$x = -\frac{3}{2}$	1	-2	3	-5
		$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
		$1\left(\frac{-3}{2}\right)$	$\left(\frac{-7}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)$	$\left(\frac{33}{4}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)$
	1	$\frac{-7}{2}$	$\frac{33}{4}$	$\frac{-139}{8}$
	$=b_2$	$=b_1$	$=b_0$	$=A_0 =$ sisa

Ingatlah

Dari contoh tersebut, jika pembagian suku banyak menghasilkan sisa sama dengan nol, dikatakan $P(x)$ habis dibagi oleh $(x - k)$ dan $(x - k)$ disebut faktor dari $P(x)$.

Jadi, $H(x) = \dfrac{x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{33}{4}}{2} = \frac{1}{8}\left(4x^2 - 14x + 33\right)$ dan

$A_0 = \frac{1}{8}(-139)$.

Pembagian suatu suku banyak oleh $(ax + b)$ dinyatakan sebagai berikut.

Diketahui, $k = -\frac{b}{a}$ maka bentuk $(x - k)$ dapat dinyatakan sebagai

$$x - k = \left[x - \left(-\frac{b}{a}\right)\right] = \left[\left(x + \frac{b}{a}\right)\right]$$

Pembagian suku banyak $P(x)$ oleh $(x + \frac{b}{a})$ memberikan hubungan berikut.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x + \frac{b}{a})\ H(x) + \text{sisa} \\ &= \frac{1}{a}(ax + b)\ H(x) + \text{sisa} \\ &= (ax + b)\left[\frac{H(x)}{a}\right] + \text{sisa} \qquad \ldots.(*) \end{aligned}$$

Persamaan (*) merupakan suku banyak $P(x)$ dibagi $(ax + b)$ memberikan hasil bagi $H(x)$ dan sisa pembagian. Nilai sisa dan koefisien-koefisien $H(x)$ ditentukan dengan cara pembagian Horner untuk $x = -\frac{b}{a}$.

Contoh 5.5

Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian dari
$(4x^3 - 10x^2 + 14x - 15) : (2x - 5)$ menggunakan cara Horner.

Jawab:

$x = \frac{5}{2}$	4	–10	14	–15
		10	0	35
	4	0	14	20

Jadi, hasil baginya adalah $\frac{4x^2 + 14}{2} = 2x^2 + 7$ dan sisanya adalah 20.

c. Pembagian Suku Banyak dengan $ax^2 + bx + c$, dengan $a \neq 0$

Pembagian $(x^3 - x^2 + 4x - 4)$ oleh $(x^2 - 1)$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$P(x) = (x^2 - 1)\ H(x) + \text{sisa} = (x + 1)\ (x - 1)\ H(x) + (A_1x + A_0)$

untuk $x = 1$ diperoleh $P(1) = 0 \cdot H(x) + (A_0 + A_1(1)) = A_1 + A_0$

untuk $x = -1$ diperoleh, $P(-1) = 0 \cdot H(x) + (A_0 + A_1(-1))$

$= -A_1 + A_0$

$x = 1$	1	–1	4	–4
		1(1)	0(1)	4(1)
	1	0	4	0
				$P(1) = 0$

Ingatlah

Dari Contoh 5.4 No. 2 diperoleh sisa pembagian adalah nol. Dikatakan suku banyak $P(x)$ habis dibagi oleh $ax + b$.

Tugas

Buatlah kelompok yang terdiri atas 4 orang. Setiap kelompok membuat masing-masing 5 soal pembagian suku banyak dengan $(x - k)$ dan $(ax + b)$. Kemudian, tentukan hasil bagi dan sisa pembagian setiap soal. Terakhir, selidiki derajat hasil bagi dan sisa pembagian setiap soal tersebut.

Apa yang Anda peroleh mengenai derajat hasil bagi jika dibandingkan derajat $P(x)$ dan pembagi? Bagaimana dengan derajat sisa pembagian terhadap derajat pembagi? Apakah hasil yang Anda peroleh berlaku umum? Untuk itu, cari di buku internet atau tanya ahli matematika mengenai hal ini. Tulis dan laporkan hasilnya di depan kelas.

$$\begin{array}{c|cccc} x=-1 & 1 & -1 & 4 & -4 \\ \hline & & + & + & + \\ & & 1(-1) & -2(-1) & 6(-1) \\ \hline & 1 & -2 & 6 & -10 \end{array}$$

$P(-1) = -10$

Dari pembagian Horner ini diperoleh

$P(1) = 0$ maka $A_0 + A_1(1) = 0 \quad \Rightarrow A_0 + A_1 = 0$

$P(-1) = -10$ maka $A_0 + A_1(-1) = -10 \Rightarrow A_0 - A_1 = -10$ +

$$\begin{aligned} -\ 2A_0 &= -10 \\ A_0 = -5 \text{ dan } A_1 &= 5 \end{aligned}$$

Dengan demikian, sisa pembagian adalah $A_0 + A_1 x$, yaitu $-5 + 5x$.

Coba Anda tentukan pembagian $(x^3 - x^2 + 4x - 4) : (x^2 - 1)$ dengan pembagian biasa seperti pada bilangan bulat. Adapun hasil bagi ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{array}{c|cccc} x=1 & 1 & -1 & 4 & -4 \\ \hline & & + & + & + \\ & & 1(1) & 0(1) & 4(1) \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \\ x=-1 & & 1(-1) & -1(-1) & \\ \hline & 1 & -1 & 5 & \\ & \| & \| & & \\ & b_1 & b_0 & & \end{array}$$

Jadi, $H(x) = b_1x + b_0 = x - 1$. Coba amati kembali bagan tersebut. Sisa dari pembagian mana angka 5?

Untuk pembagian suku banyak oleh $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, di mana $P(x)$ tidak dapat difaktorkan maka digunakan cara pembagian biasa, seperti pada bilangan. Adapun untuk $P(x)$ yang dapat difaktorkan digunakan cara pembagian biasa dan skema Horner.

Tes Kompetensi Subbab C

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Tentukanlah hasil bagi dan sisa pembagian dari pembagian-pembagian berikut ini dengan cara biasa dan cara Horner.
   a. $(3x^4 - 2x^2 + 5x + 1) : (x + 1)$
   b. $(6x^3 - 4x^2 + 2x) : (x - 1)$
   c. $(2x^5 - 5x^3 + x^2 - 1) : (x + 2)$
   d. $(100x^4 - 81) : (x - 3)$
2. Tentukan sisa pembagian untuk suku banyak berikut.
   a. $(2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5) : (x - 2)$
   b. $(3x^4 - 4x^2 + 10) : (x + 3)$
   c. $(5x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 6) : (x + 2)$
   d. $(7x^7) - 2x^5 + 4x^3 - 2x^2 + x) : (x + 1)$
3. Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian dari soal berikut dengan cara Horner.
   a. $(2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - x + 1) : (x - 3)$
   b. $(6x^4 - 5x^3 + 3x - 10) : (2x - 3)$
   c. $(8x^5 + 2x^4 + 13x^3 - 17x - 2) : (4x + 3)$
   d. $(2x^6 - x^5 + 3x^3 + x^2 + 9x - 5) : (2x + 3)$
   e. $(2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + x - 7) : (x^2 - x + 3)$
   f. $(6x^4 + x^3 + x^2 + 7x) : (3x^2 + 5x + 2)$

D. Teorema Sisa

Diketahui, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Cara Anda menentukan sisa pembagian dari pembagian suku banyak $P(x)$ oleh bentuk $(x - k)$, $(ax + b)$, dan $(ax^2 + bx + c)$, baik dengan cara Horner maupun dengan cara pembagian biasa telah dipelajari pada pelajaran sebelumnya.

Sekarang amatilah persamaan berikut:

$P(x) = f(x) \cdot H(x) + S$

$P(x)$: suku banyak yang dibagi
$f(x)$: pembagi
$H(x)$: hasil bagi
S : sisa pembagian

Jika $P(x)$ berderajat n dan $f(x)$ berderajat m $(m \leq n)$ maka derajat $H(x)$ dan S masing-masing sebagai berikut.

- derajat $H(x)$ adalah $(n - m)$
- derajat maksimum S adalah $(m - 1)$

1. Pembagian dengan Pembagi $(ax + b)$

Jika $f(x) = ax + b$, merupakan pembagi dari $P(x)$ maka hubungan antara $P(x)$ dan $f(x)$ dapat ditulis sebagai berikut.

$P(x) = (ax + b)\left[\dfrac{H(x)}{a}\right] + S$, berlaku untuk setiap x bilangan real.

Oleh karena $f(x)$ berderajat satu maka S berderajat nol. Jadi, konstanta S sama dengan A_0.

Sisa pembagian dapat ditentukan dengan menggunakan teorema berikut.

Teorema 5.1

Jika suku banyak $P(x)$ yang berderajat n dibagi dengan $(ax + b)$ maka sisanya adalah $P(-\frac{b}{a})$.

Bukti: harus ditunjukkan bahwa $S = P\left(-\frac{b}{a}\right)$. Jika suku banyak $P(x)$ berderajat n dibagi dengan $(ax + b)$, bentuk pembagian itu dituliskan sebagai berikut

$$P(x) = (ax + b)\left[\frac{H(x)}{a}\right] + S \ldots (1)$$

Selanjutnya, substitusikan nilai $x = -\frac{b}{a}$ ke persamaan (1) sehingga diperoleh

$$P(-\frac{b}{a}) = [a(-\frac{b}{a}) + b].\frac{H\left(-\frac{b}{a}\right)}{a} + S$$

$$= (-b + b) . \frac{H\left(-\frac{b}{a}\right)}{a} + S$$

$$P(-\frac{b}{a}) = S.$$

Jadi, sisa = $P(-\frac{b}{a})$. *Teorema terbukti*.

Contoh 5.6

Carilah sisa pembagian dari $(4x^3 + 2x^2 - 4x + 6) : (x - 3)$ tanpa melakukan pembagian terlebih dahulu.

Jawab:

Suku banyak $P(x) = 4x^3 + 2x^2 - 4x + 6$ dibagi dengan $(x - 3)$ sisanya adalah

$S = P\left(\frac{3}{1}\right) = P(3)$ (berdasarkan Teorema 6.1).

Jadi, dengan menyubstitusikan $x = 3$ ke dalam fungsi $P(x)$, diperoleh

$P(3) = 4 . 3^3 + 2 . 3^2 - 4 . 3 + 6 = 120$.

Dengan demikian, sisa pembagiannya adalah 120.

Contoh 5.7

Tentukanlah p agar pembagian $(6x^2 + 7x - 5) : (px - 1)$ menghasilkan sisa pembagian yang bernilai 0.

Jawab:

Suku banyak $P(x) = 6x^2 + 7x - 5$ dibagi dengan $(px - 1)$, sisanya adalah

$S = P\left(\frac{1}{p}\right)$ (berdasarkan Teorema 5.1). Jadi, dengan menyubstitusikan

$x = \frac{1}{P}$ ke dalam fungsi $P(x)$, diperoleh

$$P\left(\frac{1}{p}\right) = 6\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{p}\right) - 5$$

$$= \frac{6}{P^2} + \frac{7}{p} - 5$$

sehingga sisa pembagian adalah $S = \frac{6}{P^2} + \frac{7}{p} - 5$.

Sisa pembagian sama dengan nol maka berlaku

$$\frac{6}{P^2} + \frac{7}{p} - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6 + 7p - 5p^2}{p^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5p^2 + 7p + 6}{p^2} = 0$$

Penyebut *tidak boleh* sama dengan nol sehingga

$-5p^2 + 7p + 6 = 0$

$5p^2 - 7p - 6 = 0$

Dengan menggunakan rumus *abc* diperoleh

$$p_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 5(-6)}}{2 \cdot 5} = \frac{7 \pm 13}{10}$$

$$p_1 = \frac{7 + 13}{10} = 2 \text{ atau } p_2 = \frac{7 - 13}{10} = -\frac{3}{5}$$

Jadi, $p_1 = 2$ atau $p_2 = -\frac{3}{5}$.

Tokoh Matematika

Evariste Galois (1811–1832)

Pada usia 20 tahun telah membuktikan persamaan suku banyak lebih dari empat tidak bisa diselesaikan secara langsung.

Sumber: *www-history mcs.st-andrews.ac.uk*

2. Pembagian dengan Pembagi $(x - a)(x - b)$

Suatu suku banyak $p(x)$ yang dibagi oleh $f(x) = (x - a)(x - b)$, dapat dituliskan sebagai berikut.

$P(x) = (x - a)(x - b)\ H(x) + S$ … (1)

berlaku untuk setiap x bilangan real.

$f(x) = (x - a)(x - b)$ berderajat 2 sehingga sisanya berderajat maksimum satu, atau $S = A_0 + A_1x$.

Coba Anda jelaskan mengapa sisanya berderajat maksimum satu.

Dengan demikian, persamaan (1) dapat dituliskan sebagai berikut.

$P(x) = (x - a)(x - b) \cdot H(x) + A_1x + A_0$

Sisa dapat ditentukan dengan teorema sisa, yaitu sebagai berikut.

- Untuk pembagi $(x - a)$, diperoleh sisa
  $P(a) = 0 \cdot H(a) + A_1(a) + A_0$
  $= A_1a + A_0$ … (2).
- Untuk pembagi $(x - b)$, diperoleh sisa
  $P(b) = 0 \cdot H(b) + A_1(b) + A_0$
  $= A_1b + A_0$ … (3).

Dari persamaan 2 dan 3, dapatkah Anda menemukan rumus berikut.

$$\boxed{A_1 = \frac{P(a) - P(b)}{a - b} \text{ dan } A_0 = \frac{aP(b) - bP(a)}{a - b}}$$

Pembahasan Soal

Suatu suku banyak $P(x)$ dibagi oleh $(x^2 - 1)$ sisanya $(12x - 23)$ dan jika dibagi oleh $(x - 2)$ sisanya 1. Sisa pembagian suku banyak oleh $(x^2 - 3x + 2)$ adalah ....

Jawab:

$(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)$

Jika $P(x)$ dibagi $(x - 1)$, sisanya $S = f(1) = 12(1) - 23 = -11$.

Jika $P(x)$ dibagi $(x - 2)$ sisa $S = f(2) = 1$ (diketahui).

Jika $P(x)$ dibagi $(x^2 - 3x + 2) = (x - 2)(x - 1)$ sisanya adalah

$$S = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}x + \frac{2f(1) - 1f(2)}{2 - 1}$$

$$= \frac{1 - (-11)}{1}x + \frac{2(-11) - 1(1)}{1}$$

$S = 12x - 23$

Soal Ebtanas 1999

Contoh 5.8

Jika suku banyak $P(x)$ dibagi oleh $(x - 2)$, sisanya 8. Adapun jika $P(x)$ dibagi oleh $(x^2 - x - 6)$, sisanya $(3x - 6)$. Berapa sisa pembagian $P(x)$ oleh $(x^2 - 4)$?

Jawab:

Pernyataan $P(x)$ dibagi oleh $(x - 2)$ bersisa 8 dapat ditulis dalam bentuk persamaan

$P(x) = (x - 2)\ H(x) + 8$ yang berlaku untuk setiap x bilangan real.

Untuk $x = 2$, diperoleh $P(2) = 8$.

Pernyataan $P(x)$ dibagi oleh $(x^2 - x - 6)$ bersisa $(3x - 6)$ dapat ditulis dalam persamaan

$P(x) = (x - 3)(x + 2)\ H(x) + 3x - 6$ yang berlaku untuk setiap x bilangan real.

- Untuk $x = 3$, diperoleh $P(3) = 3$.
- Untuk $x = -2$, diperoleh $P(-2) = -12$.

Misalkan, sisa pembagian $P(x)$ oleh $x^2 - 4$ adalah $S = A_1 x + A_0$ maka bentuk pembagian dapat dituliskan dalam persamaan $P(x) = (x + 2)(x - 2) H(x) + A_1 x + A_0$ yang berlaku untuk setiap x bilangan real.

- Untuk $x = 2$, diperoleh $P(2) = 2A_1 + A_0 = 8$ ....(*)
- Untuk $x = -2$, diperoleh $P(-2) = -2A_1 + A_0 = -12$ ....(**)

Dari persamaan (*) dan (**) diperoleh
$A_0 = -2$ dan $A_1 = 5$ (coba buktikan!)
Jadi, sisa pembagian $P(x)$ oleh $(x^2 - 4)$ adalah
$S = 5x - 2$.

Tes Kompetensi Subbab D

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Tentukanlah sisa pembagian soal-soal berikut tanpa melakukan pembagian terlebih dahulu.
   a. $(16x^4 + 8x^3 - 4x + 5) : (2x - 1)$
   b. $(81x^4 - 27x^3 + 9x^2 - 3x + 1) : (3x + 2)$
2. Buktikan bahwa
   a. $(2a^3 + 3a^2b - b^3)$ habis dibagi oleh $(2a - b)$
   b. $(p^4 - 8q^4 - 2p^2q^2)$ habis dibagi oleh $(p + 2q)$
3. Tentukan sisa pembagian dari soal-soal berikut menggunakan teorema pembagian.
   a. $(x^2 - 2y^2 + xy) : (2x - y)$
   b. $(p^2 - 6q^2 + pq) : (3q + p)$
4. Tentukan nilai p agar pembagian berikut memiliki sisa S sebagai berikut.
   a. $(2x^4 + px^2(3x + 2) - 11x - 3) : (x + 3)$ dan $S = 3$
   b. $(x^5 + x^4 - px^2(x + 1) + 9x + 14) : (x - 3)$ dan $S = 5$
5. Tentukan nilai p jika $(x^3 - 4x^2 + 5x + p)$ dan $(x^2 + 3x - 2)$ dibagi $(x + 1)$ memberikan sisa yang sama.
6. Tentukan nilai p dan q jika $(x^4 + px^3 + (q - 14)x^2 + 28x - 15)$ habis dibagi oleh $(x^2 - 2x + 1)$
7. Jika P(x) dibagi oleh $(x - 2)$, sisanya 5 dan jika dibagi $(x - 1)$ sisanya 4. Tentukan sisanya jika P(x) dibagi $(x^2 - 3x + 2)$.
8. Jika P(x) dibagi $(x^2 - 4)$, sisanya $(3x - 7)$ dan jika dibagi $(x^2 - 9)$, sisanya $(5x - 13)$. Tentukan sisanya jika P(x) dibagi oleh $(x + 1)$.

E. Teorema Faktor

1. Pengertian Teorema Faktor

Pandanglah suku banyak $P(x)$ dan pembagi $ax + b$. Kemudian, amati kembali Teorema 5.1 dengan saksama. Jika sisanya 0, apa yang terjadi dengan $(ax + b)$? Sebagai akibat dari Teorema 5.1, jika sisa $P\left[-\frac{b}{a}\right] = 0$ maka

$$P(x) = (ax + b)\left[\frac{H(x)}{a}\right] + 0$$

$$\Leftrightarrow P(x) = (ax + b)\left[\frac{H(x)}{a}\right] \text{dengan } a \neq 0.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $(ax + b)$ adalah suatu faktor dari $P(x)$. Dengan demikian, dapat dikatakan jika $P(x)$ adalah suatu polinom, $ax + b$ adalah pembagi, dan sisa pembagiannya adalah 0 atau $P\left(\frac{-b}{a}\right) = 0$ maka $ax + b$ adalah *faktor* dari $P(x)$.

Ingatlah

Selain untuk menentukan faktor suatu suku banyak, teorema faktor dapat pula digunakan untuk menentukan koefisien-koefisien suku banyak yang belum diketahui.

Contoh

Tentukan nilai k sehingga $(x + 3a)$ merupakan faktor dari $x^3 + (ak + 2a)\,x^2 + 18a^3$

Jawab:

Berdasarkan teorema faktor maka

$f(–3a) = 0$

$(–3a)^3 + (ak + 2a)\,(–3a)^2 + 18a^3 = 0$

$–27a^3 + (ak + 2a)\,9a^2 + 18a^3 = 0$

$–27a^3 + 9a^3k + 18a^3 + 18a^3 = 0$

$(–27 + 9k + 36)\,a^3 = 0$

$(9 + 9k)\,a^3 = 0$

atau

$9 + 9k = 0$

$9k = –9$

$k = –1$

Contoh 5.9

Tunjukkan bahwa $(x + 5)$ merupakan faktor dari $P(x) = x^3 + 4x^2 + 11x + 30$.

Jawab:

Untuk memeriksa apakah $(x – k)$ merupakan faktor dari $P(x)$, Anda cukup menunjukkan bahwa $P(k) = 0$. Adapun $P(k)$ dapat dihitung dengan cara substitusi atau cara Horner.

$P(–5) = (–5)^3 + 4(–5)^2 + 11(–5) + 30 = 0.$

Oleh karena $P(–5) = 0$ maka $(x + 5)$ merupakan faktor dari $P(x)$.

Teorema 5.2

Jika $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}\,.\,x^{n-1} + \ldots + a_1\,.\,x + a_0$ dengan a_i bilangan bulat, $i = 1, 2, ..., n$ dan p bilangan bulat dengan p merupakan harga nol dari $P(x)$ maka p adalah pembagi a_0.

Bukti:

Misal, p bilangan bulat yang merupakan harga nol $P(x)$ maka

$$P(p) = a_np^n + a_{n-1}\,.\,p^{n-1} + \ldots + a_1p + a_0 = 0$$

$$a_np^n + a_{n-1\,.\,p}^{\;\;n-1} + \ldots + a_1p = -a_0$$

$$p(a_n\,.\,p^{n-1} + a_{n-1}\,.\,p^{n-2} + \ldots + a_1) = -a_0$$

Oleh karena p adalah bilangan bulat dan a_i juga adalah bilangan bulat maka ruas kiri persamaan tersebut merupakan bilangan bulat.

Jadi, p pembagi dari a_0 (*terbukti*).

Contoh 5.10

Tentukanlah faktor-faktor dari $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

Jawab:

$P(x)$ berderajat 3 sehingga maksimum faktornya berderajat satu yang diperoleh 3 buah. Jika $(x - k)$ merupakan faktor dari $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ maka nilai k yang diperoleh adalah pembagi bulat dari -6, yaitu ±1, ±2, ±3, dan ±6. Nilai-nilai k tersebut disubstitusikan pada $P(x)$.

- Untuk $k = -1 \Rightarrow P(-1) = (-1)^3 + 4(-1)^2 + (-1) - 6 = -4$.
  $P(-1) \neq 0$ maka $(x + 1)$ bukan faktor dari $P(x)$.
- Untuk $k = 1 \Rightarrow P(1) = 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 1 - 6 = 0$.
  $P(1) = 0$ maka $(x - 1)$ faktor dari $P(x)$.
- Untuk $k = -2 \Rightarrow P(-2) = (-2)^3 + 4(-2)^2 - 2 - 6 = 0$
  $P(-2) = 0$ maka $(x + 2)$ faktor dari $P(x)$.
- Untuk $k = 2 \Rightarrow P(2) = 2^3 + 4 \cdot 2^2 + 2 - 6 = 20$
  $P(2) \neq 0$ maka $(x - 2)$ bukan faktor dari $P(x)$.
- Untuk $k = -3 \Rightarrow P(-3) = (-3)^3 + 4(-3)^2 - 3 - 6 = 0$
  $P(-3) = 0$ maka $(x + 3)$ faktor dari $P(x)$.
- Untuk $k = 3 \Rightarrow P(3) = 3^3 + 4 \cdot 3^2 + 3 - 6 = 60$
  $P(3) \neq 0$ maka $(x - 3)$ bukan faktor dari $P(x)$.

Jadi, $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ mempunyai satu faktor linear $(x - 1)$, $(x + 2)$, dan $(x + 3)$.

Hal Penting

- suku banyak
- teorema sisa
- suku tetap
- pembagian suku banyak
- cara Horner
- teorema faktor

2. Penggunaan Teorema Faktor untuk Mencari Akar Persamaan Suku Banyak

Diketahui, $P(x)$ suku banyak dengan bentuk:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$

$(x - k)$ adalah faktor linear $P(x)$ jika dan hanya jika k akar persamaan $P(x) = 0$. Jika suku banyak $P(x)$ berderajat n maka persamaan $P(x) = 0$ maksimum mempunyai n buah akar.

Contoh 5.11

Tentukan akar-akar bulat untuk suku banyak $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Jawab:

Akar bulat untuk $x^2 - 2x - 3$ adalah pembagi bulat dari -3, yaitu $k = \{\pm1, \pm3\}$.

Suku banyak $P(x) = x^2 - 2x - 3$ berderajat 2 sehingga maksimum banyak akar persamaan adalah dua. Untuk memperoleh akar-akar tersebut, hitunglah $P(k)$ untuk setiap nilai k. (lihat Teorema 5.2)

- Untuk $k = 1 \rightarrow P(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$.
  $P(1) \neq 0$ sehingga $x = 1$ bukan akar persamaan suku banyak $x^2 - 2x - 3 = 0$.
- Untuk $k = -1 \rightarrow P(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$.
  $P(-1) = 0$ sehingga $x = -1$ akar persamaan suku banyak $x^2 - 2x - 3 = 0$.
- Untuk $k = 3 \rightarrow P(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 0$.
  $P(3) = 0$ sehingga $x = 3$ akar persamaan suku banyak $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Dua buah akar persamaan suku banyak $x^2 - 2x - 3 = 0$ telah diperoleh, yaitu $x = -1$ dan $x = 3$ sehingga $P(-3) \neq 0$. Jadi, akar-akar bulat untuk $x^2 - 2x - 3 = 0$ adalah $x = -1$ dan $x = 3$.

Tes Kompetensi Subbab E

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Periksalah apakah soal-soal berikut ini merupakan faktor dari
$P(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$
a. $(x - 1)$
b. $(x + 1)$
c. $(x - 2)$
d. $(x + 2)$
e. $(x - 3)$
f. $(x + 3)$

2. Tentukan p dari $P(x) = 2x^4 + x^3 - 45x^2 - 58x + p$ agar $P(x)$ memiliki faktor
a. $(x + 1)$
b. $(2x - 1)$

3. Tentukan faktor-faktor dari suku banyak berikut.
a. $P(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 1 = 0$
b. $P(x) = 2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x - 6$
c. $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2$
d. $P(x) = 4x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 34x + 8$

4. Jika $(x + 1)$ merupakan faktor suku banyak berikut ini, tentukan faktor lainnya.
a. $px^3 + x^2 - 2x - 1$
b. $x^3 + px^2 - 5x - 6$
c. $px^3 + 11x^2 - 6x - 8$
d. $2x^4 + px^3 - 29x^2 - 17x + 15$

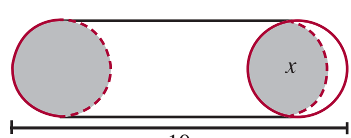
5. Tentukan akar bulat dari persamaan berikut.
a. $2x^3 - x^2 + 8x - 4 = 0$
b. $4x^4 - 15x^2 + 5x + 6 = 0$
c. $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2 = 0$
d. $x^3 + \sqrt{2}x^2 + (\sqrt{2} - 4)x - 2 = 0$

6. Tunjukkan bahwa $(x - 1)$ adalah faktor dari suku banyak $x^n - 1$ untuk setiap n bilangan asli.

7. Tentukan nilai p agar pecahan berikut ini dapat disederhanakan.
a. $\dfrac{x^3 + 2px^2 + 1}{3x^2 - 2x - 1}$
b. $\dfrac{2x^2 + px^2 - x - 3}{3x^3 + 8x^2 - 8x + 5}$

8. Jika suku banyak $x^3 + p(x^2 - 3) - qx$ dan $x^3 + (p - 2)^2 - q(x + 3)$ mempunyai sebuah faktor berderajat dua yang sama, tentukan nilai p dan q.

9. Sebuah tangki gas berbentuk seperti pada gambar berikut.
Jika panjang tangki gas 10 m dan volumenya $20\,\pi$ m^3, tentukan jari-jari tangki gas.



Rangkuman

- Rumus umum fungsi suku banyak $f(x)$ adalah
  $f(x) = a_r x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots a_0$
- Fungsi suku banyak
  $f(x) = a_r x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots a_0$
  $g(x) = b_r x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots b_0$
  dikatakan identik jika dan hanya jika
  $a = b_n;\ a_{n-1} = b_{n-1};\ \ldots;\ a_0 = b_0$
- Nilai suku banyak dapat dicari dengan cara substitusi dan skema.
- Mencari hasil bagi dan sisa bagi dapat dilakukan dengan pembagian bersusun atau cara horner.
- Pembagian suku banyak oleh pembagi yang berbentuk linear, menghasilkan sisa berderajat nol.

Sekarang, lanjutkanlah rangkuman di atas.

Refleksi

Setelah Anda mempelajari Bab 5,

1. tuliskanlah materi mana yang menurut Anda sulit dan yang mudah,
2. bagian manakah yang menurut Anda sangat menarik dan penting untuk dipelajari,
3. adakah soal tes kompetensi yang tidak dapat Anda kerjakan?
4. apakah Anda mendiskusikan materi yang belum Anda pahami?

Tes Kompetensi Bab 5

A. Pilihlah salah satu jawaban dan berikan alasannya.

1. Jika $x^3 - 12x + ka$ habis dibagi dengan $(x - 2)$ maka ia juga habis dibagi dengan ....
   a. $(x - 1)$
   b. $(x + 1)$
   c. $(x + 2)$
   d. $(x - 3)$
   e. $(x + 4)$

2. Hasil bagi dan sisa pembagian dari suku banyak $4x^3 - 2x^2 + x - 1$ dibagi oleh $2x^2 + x + 1$ berturut-turut adalah ....
   a. $(2x - 2)$ dan $(x + 1)$
   b. $(2x + 2)$ dan $(x - 1)$
   c. $(2x + 2)$ dan $(x + 1)$
   d. $(x + 2)$ dan $(2x - 1)$
   e. $(x - 2)$ dan $(2x + 1)$

3. Suku banyak $f(x)$ dibagi oleh $(x - 3)$ bersisa 5 dan dibagi oleh $(x + 4)$ bersisa -23. Sisa dari pembagian $f(x)$ oleh $(x - 3)(x + 4)$ adalah ....
   a. $3x - 4$
   b. $-4x + 17$
   c. $-3x + 14$
   d. $5x - 10$
   e. $4x - 7$

4. Jika $f(x) = x^3 - x + 2$ dan $g(x) = 2x^2 + x - 1$ maka $f(x) \times g(x)$ adalah ....
   a. $2x^5 + x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 2$
   b. $2x^5 + x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 3x - 2$
   c. $2x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 3x + 2$
   d. $2x^5 - x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$
   e. $2x^5 - x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

5. Diketahui suku banyak $4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 8x + a$ dan $6x^2 - 11x + 4$ Jika suku banyak itu mempunyai satu faktor yang sama maka bilangan bulat a adalah...
   a. -2
   b. -1
   c. 0
   d. 1
   e. 2

6. Persamaan $2x^3 + 3x^2 + px + 8 = 0$ mempunyai sepasang akar yang berkebalikan. Nilai $p =$ ....
   a. 18
   b. 6
   c. 3
   d. -6
   e. -18

7. Diketahui persamaan
   $$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{x-8}{x^2 - x - 2}.$$
   Nilai A dan B berturut-turut adalah ....
   a. -2 dan 3
   b. 2 dan -3
   c. 3 dan -2
   d. -3 dan 2
   e. -3 dan -2

8. Suku banyak $f(x)$ habis dibagi oleh $(x - 1)$. Sisa pembagian $f(x)$ oleh $(x - 1)(x + 1)$ adalah ....
   a. $-\frac{1}{2} f(1)(1 - x)$
   b. $-\frac{1}{2} f(1)(1 + x)$
   c. $\frac{1}{2} f(-1)(1 - x)$
   d. $\frac{1}{2} f(-1)(1 + x)$
   e. $-\frac{1}{2} f(-1)(1 + x)$

9. Diketahui $f(x) = px^3 + (2p - 1)x^2 - 2px + 3$ dan $g(x) = 2px^3 - 3px^2 - (p + 4)x - p$. Jika sisa pembagian $f(x)$ oleh $(x + 1)$ sama dengan sisa pembagian $g(x)$ oleh $(2x - 1)$ maka nilai p adalah ....
   a. $\frac{2}{5}$
   b. $-\frac{2}{5}$
   c. $\frac{4}{5}$
   d. $-\frac{4}{5}$
   e. $\frac{3}{5}$

10. Jika $f(x) = 4x^4 - x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x$ dibagi dengan
$(2x + \sqrt{2}\,)$ sisanya adalah ....

a.	$-\sqrt{2}$	**d**.	$\frac{1}{2}$
b.	-1	**e**.	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
c.	$-\frac{1}{2}$		

11. Suku banyak $f(x) = x^3 - 2x^2 + px + 6$ habis dibagi $(x - 1)$. Jika dibagi dengan $(x + 3)$ $(x + 1)$ sisanya adalah ....
a. $16x + 24$
b. $16x - 24$
c. $24x + 16$
d. $24x - 16$
e. $-24x + 16$

12. Suatu suku banyak $P(x)$ dibagi oleh $(x^2 - 1)$ sisanya $(12x - 23)$ dan jika dibagi oleh $(x - 2)$ sisanya 1. Sisa pembagian suku banyak P(x) oleh $(x^2 - 3x + 2)$ adalah ....
a. $12x + 23$
b. $12x - 23$
c. $23x + 12$
d. $23x - 12$
e. $-23x + 12$

13. Sisa bagi dari $(4x^4 + 3x^3 - x + 4) : (x^2 + x - 2)$ adalah ....
a. $12x + 22$
b. $12x - 22$
c. $-12x + 22$
d. $-12x - 22$
e. $22x - 12$

14. Diketahui suku banyak $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$. Jika suku banyak ini habis dibagi oleh $(x - 3)$ dan $(x - 2)$, maka sisa pembagian $f(x)$ oleh $x^2 + 5x + 6$ adalah ....
a. $60(x + 1)$
b. $-60(x + 1)$
c. $60(x - 1)$
d. $-60(x - 1)$
e. $60(1 - x)$

15. Diketahui $P(x) = x^3 + 3x^2 + px + q$. Jika $P(x)$ dibagi $(x^2 + 2x - 3)$ sisanya $7x + 3$, maka nilai p dan q berturut-turut adalah ....

a.	3 dan 2	**d**.	–6 dan 0
b.	–3 dan 2	**e**.	6 dan 0
c.	–2 dan 3		

16. Jika suku banyak $x^4 - 3x^2 + ax + b$ dibagi oleh $x^2 - 3x - 4$, akan memberikan sisa $2x + 5$.
Nilai a dan b adalah ....
a. $a = 35$ dan $b = 40$
b. $a = -35$ dan $b = 40$
c. $a = -35$ dan $b = -40$
d. $a = 40$ dan $b = -35$
e. $a = 40$ dan $b = -35$

17. Banyak akar real dari persamaan
$x^4 - x - 3x^2 + 4x - 4 = 0$ adalah ....

a.	4	**d**.	1
b.	3	**e**.	0
c.	2		

18. Jika $f(x)$ dibagi dengan $x + 2$, sisanya adalah 3. Jika $f(x)$ dengan $x^2 - 4$, sisanya adalah ....

a.	$x + 5$	**d**.	$x + 2$
b.	$x + 4$	**e**.	$x + 1$
c.	$x + 3$		

19. Jika $f(x)$ dibagi oleh $x - 1$ dan $x + 1$, sisanya berturut-turut adalah 2 dan 3. Jika $g(x)$ dibagi oleh $x - 1$ dan $x + 1$, sisanya berturut-turut adalah 1 dan –2.
Jika $f(x) = h(x) \cdot g(x)$ dibagi oleh $x^2 - 1$ maka sisanya adalah ....

a.	$4x + 2$	**d**.	$2x - 4$
b.	$4x - 2$	**e**.	$-2x - 4$
c.	$2x + 4$		

20. Jika $f(x)$ dibagi dengan $x - 2$, sisanya 24. Jika $f(x)$ dibagi dengan $x + 5$, sisanya 10. Jika $f(x)$ dibagi dengan $x^2 + 3x - 10$, sisanya adalah ....

a.	$x + 34$	**d**.	$2x - 20$
b.	$x - 34$	**e**.	$x + 14$
c.	$2x + 20$		

B. Jawablah dengan singkat, tepat, dan jelas.

1. Tentukan $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ dan $f(x) \times g(x)$ untuk soal-soal berikut.

a. $f(x) = 5x^3 + 2x - 4$ dan
$g(x) = 3x^4 - 4x - 7$

b. $f(x) = 6x^4 - 2x^3 + x + 5$ dan
$g(x) = 3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 8$

c. $f(x) = (2x - 1)^3$ dan $g(x) = (5x + 2)^2$

d. $f(x) = (3x + 2)^3$ dan $g(x)$
$= (x - 2)\,(x + 2)^2$

e. $f(x) = (5 - 3x)^3$ dan
$g(x) = (x^2 - 2x)\,(x_2 + 2x)$

2. Hitunglah nilai suku banyak $P(x)$ menggunakan substitusi untuk soal-soal berikut ini.

a. $P(x) = 5x^5 - 3x^3 - x + 15$ untuk $x = 2$

b. $P(x) = 2x^5 - x^4 + 3x^2 - 2x + 10$ untuk $x = -2$

c. $P(x) = 3x^7 - 5x^4 - 2x^3 + 3x - 5$ untuk $x = -1$

d. $P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 3x + 5 =$ untuk $x = -\dfrac{1}{2}$

3. Carilah bilangan p dan q agar $(px^3 - 5x^2 - 22x + q)$ habis dibagi oleh $x^2 - 4x - 5$ dengan menggunakan cara Horner dan cara pembagian biasa.

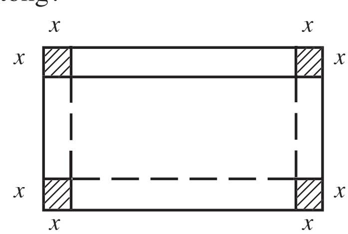
4. Buktikan bahwa

a. $p^{2n} - q^{2n}$ habis dibagi oleh $p + q$

b. $p^{2n+1} + q^{2n+1}$ habis dibagi oleh $p + q$.

Dalam hal ini n bilangan bulat positif.

5. Sebuah kotak terbuka akan dibuat dari selembar karton. Karton tersebut berbentuk persegipanjang dan berukuran 6×5 inci (inci = 2,54 cm). Cara membuat kotak ini adalah dengan memotong sebuah persegi dari setiap sudutnya. Jika volume kotak 14 inci^3, berapa inci^2 persegi yang harus dipotong?



Bab 6

Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers

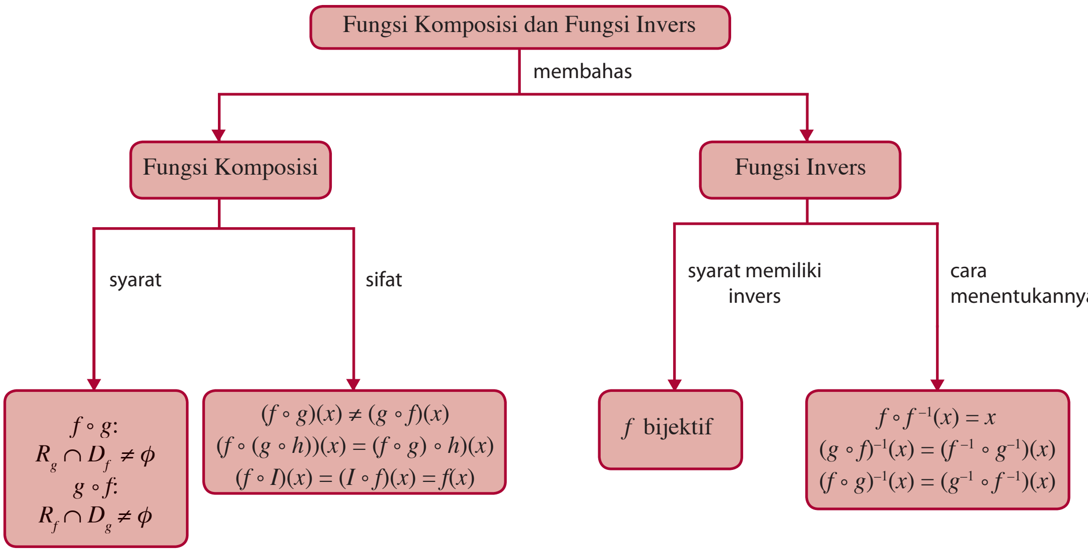
Setelah mempelajari bab ini, Anda harus mampu menggunakan konsep, sifat, dan aturan fungsi komposisi dalam pemecahan masalah; menggunakan konsep, sifat, dan aturan fungsi invers dalam pemecahan masalah.

Anda telah mempelajari pengertian fungsi di SMP. Demikian pula halnya dengan domain, kodomain, dan range fungsi telah Anda pelajari juga. Akan tetapi, pada pembahasan mengenai hal tersebut tidak dipelajari sifat-sifat fungsi, aljabar fungsi, fungsi komposisi, dan fungsi invers. Pada bab ini, konsep-konsep fungsi yang telah Anda pelajari di SMP tersebut akan dikembangkan sampai pada sifat-sifat fungsi, aljabar fungsi, fungsi komposisi, fungsi invers, dan invers dari fungsi komposisi. Salah satu manfaat belajar materi ini ialah untuk menyelesaikan masalah berikut.

Jumlah n mobil yang diproduksi suatu pabrik selama 1 hari setelah t jam operasi adalah $n(t) = 200t - 10t^2$, $0 \le t < 10$. Jika biaya produksi n mobil (dalam dolar) adalah $C(n) = 30.000 + 8.000n$, tentukan biaya C sebagai fungsi dari waktu. Berapakah biaya memproduksi mobil selama 1 bulan? Untuk menjawabnya, Anda harus mempelajari bab ini dengan baik.

Diagram Alur

Untuk mempermudah Anda dalam mempelajari bab ini, pelajarilah diagram alur yang disajikan sebagai berikut.



Tes Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Coba jelaskan apa yang dimaksud dengan relasi dan fungsi. Berikan 2 contoh relasi yang merupakan fungsi dan yang bukan fungsi.
2. Jika $f(x) = 2x^2 + 7x - 15$, tentukan nilai fungsi f pada
   a. $x = \dfrac{1}{2}$ **b.** $x = \dfrac{1}{a^2 - 1}$
3. Diketahui $f(x) = \dfrac{x+2}{x-6}$.
   a. Apakah titik (3,14) terletak pada grafik f?
   b. Jika $x = 4$, berapakah $f(x)$?
   c. Tentukan domain, kodomain, dan range dari f.

A. Fungsi dan Sifatnya

Sebelum membahas beberapa macam fungsi, mari awali bagian ini dengan mengulang pengertian relasi dan fungsi.

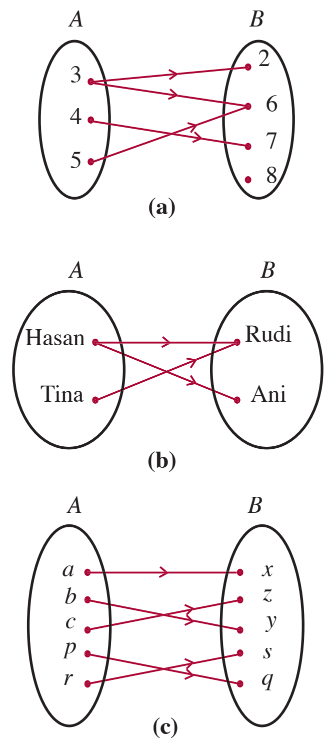
1. Pengertian Relasi

Dari himpunan A dan B yang tidak kosong dikatakan bahwa ada suatu relasi dari A ke B jika ada anggota himpunan A yang berpasangan dengan anggota himpunan B.

Amati diagram pada Gambar 6.1. Relasi yang ditunjukkan diagram tersebut dapat dituliskan dalam bentuk himpunan pasangan terurut berikut.

a. $\{(3, 2), (3, 6), (4, 7), (5, 6)\}$
b. {(Hasan, Rudi), (Hasan, Ani), (Tina, Rudi)}
c. $\{(a, x), (b, y), (c, z), (p, q), (r, s)\}$

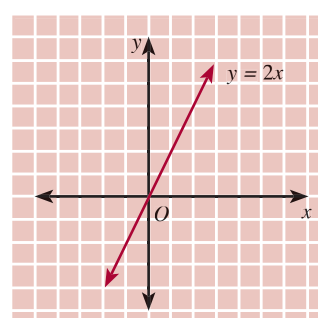
Daerah asal (domain) dari relasi pada Gambar 6.1 (a) adalah $\{3, 4, 5\}$, daerah kawannya (kodomain) adalah $\{2, 6, 7, 8\}$, dan daerah hasilnya (range) adalah $\{2, 6, 7\}$. Dapatkah Anda menentukan domain, kodomain, dan range dari Gambar 6.1 (b) dan (c)?



Gambar 6.1

Misalkan antara x dan y yang keduanya bilangan real terdapat hubungan (relasi) H, yang dinyatakan sebagai $y = 2x$. Grafik relasi ini berupa garis lurus seperti diperlihatkan pada Gambar 6.2. Domain relasi ini adalah $D_H = \{x| \, x \in R\}$, kodomainnya adalah $\{y| \, y \in R\}$ dan rangenya adalah $R_H = \{y| \, y \in R\}$. Titik-titik (x, y) yang memenuhi hubungan ini begitu banyak sehingga jika dirinci satu per satu tidak mungkin dilakukan. Dalam matematika, hubungan ini ditulis dengan $\{(x, y)| \, y = 2x; x, y \in R\}$.

Relasi $\{(x, y)|y = x^2; x, y \in R\}$ jika disajikan dalam diagram Cartesius terdiri atas semua titik yang terletak pada kurva $y = x^2$, seperti diperlihatkan pada Gambar 6.3(a). Adapun relasi $\{(x, y)|x^2 + y^2 = 25; x, y \in R\}$ terdiri atas semua titik yang terletak pada $x^2 + y^2 = 25$ seperti diperlihatkan pada Gambar 6.3(b).



Gambar 6.2

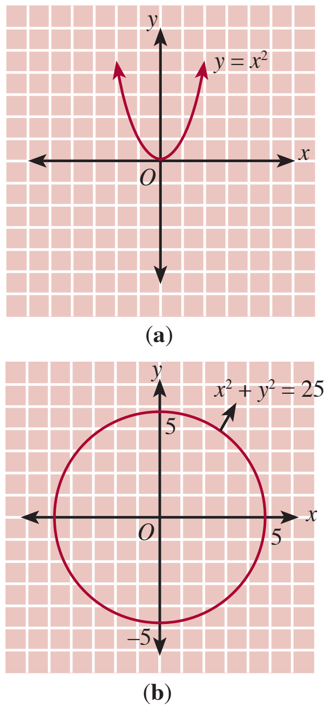
Dari uraian tersebut dapatkah Anda menduga bentuk umum relasi? Cobalah nyatakan bentuk tersebut dengan kalimat Anda sendiri. Konsep yang telah Anda pelajari tersebut memperjelas definisi berikut.

Definisi 6.1

Relasi H dari himpunan A ke himpunan B ialah himpunan bagian dari himpunan pasangan berurutan yang merupakan himpunan bagian dari $A \times B$. Jadi, H disebut relasi dari A ke B jika H himpunan bagian dari $\{(x, y)|x \in A, y \in B\}$.

Domain dari suatu relasi adalah himpunan yang anggotanya terdiri atas unsur-unsur pertama dari semua pasangan berurutan yang merupakan anggota relasi tersebut. Adapun *range*-nya adalah himpunan yang anggotanya terdiri atas unsur-unsur kedua dari semua pasangan berurutan yang merupakan anggota relasi itu.

2. Pengertian Fungsi



Gambar 6.3

Amati kembali Gambar 6.2. Pada relasi $\{(x, y) | y = 2x; x, y \in R\}$, setiap unsur pada daerah asal (domain) dihubungkan dengan *satu dan hanya satu unsur* pada daerah hasil (range). Misalnya, –2 dihubungkan dengan –4, –1 dengan –2, 0 dengan 0, 1 dengan 2, 2 dengan 4, dan seterusnya.

Sekarang amati Gambar 6.3(a). Pada relasi $\{(x, y) | y = x^2; x, y \in R\}$, setiap unsur pada daerah asal dihubungkan dengan satu dan hanya satu unsur pada daerah hasil; –2 dihubungan dengan 4, –1 dengan 1, 0 dengan 0, 1 dengan 1, 2 dengan 4, dan seterusnya. Relasi $\{(x, y) | y = 2x; x, y \in R\}$ dan relasi $\{(x, y) | y = x^2; x, y \in R\}$ disebut *fungsi*.

Berbeda dengan Gambar 6.3 (b), yaitu relasi $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 25; x, y \in R\}$. Pada relasi ini, untuk nilai x yang sama misalnya $x = 3$, terdapat dua nilai y yang berbeda, yaitu $y = 4$ dan $y = –4$. Jadi, relasi $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 25; x, y \in R)$ *bukan fungsi*.

Dari uraian tersebut, dapatkah Anda menyatakan pengertian fungsi? Cobalah nyatakan pengertian fungsi dengan kata-kata Anda sendiri. Konsep yang telah Anda pelajari tersebut memperjelas definisi berikut.

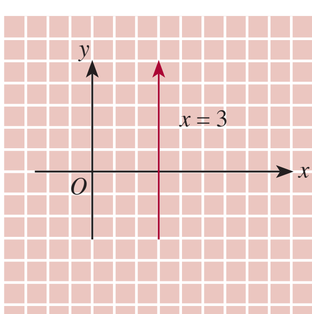
Definisi 6.2

Fungsi ialah relasi dengan setiap unsur dari daerah asalnya dipasangkan dengan tepat satu unsur dari daerah kawannya.

Contoh 6.1

Di antara grafik pada Gambar 6.4, manakah yang menyatakan suatu fungsi dari $R \rightarrow R$, $x, y \in R$? Jelaskan jawaban Anda.

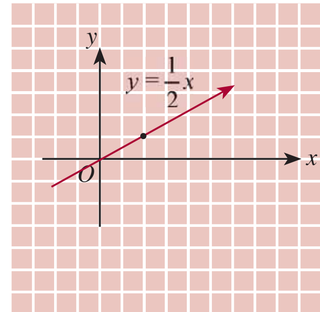
Jawab:



(a)

a. Dari Gambar 6.4(a) tampak bahwa untuk $x = 3$ dihubungkan dengan $y \in R$, misalnya 3 dengan 0, 3 dengan 1, 3 dengan 2, dan seterusnya. Akibatnya, relasi $\{(x,y) | x = 3; x, y \in R\}$ *bukan* merupakan fungsi.

b. Dari Gambar 6.4(b) tampak bahwa setiap unsur pada *domain* dihubungkan dengan satu dan hanya satu unsur pada *range*. Misalnya, 4 dihubungkan dengan 2; –2 dihubungkan dengan –1; 0 dihubungkan dengan 0; 2 dengan 1; dan seterusnya. Dengan demikian, relasi $\{(x,y) | y = \frac{1}{2}x;\ x, y \in R\}$ merupakan fungsi. Grafik pada Gambar 6.4(b), menyatakan fungsi.



(b)

Gambar 6.4

Contoh 6.2

Diketahui fungsi $f: R \to R$ dan $f(x) = x^2 - 1$.

a. Hitunglah $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$, dan $f(3)$.

b. Jika $f(a) = 3$, tentukan nilai a yang memenuhi.

c. Gambarkan grafik fungsi tersebut.

d. Jika daerah asal fungsi tersebut adalah $D_f = \{x | -3 \le x \le 3, x \in R\}$, tentukan daerah hasilnya.

Jawab:

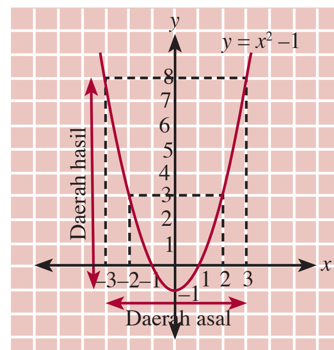
a.
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 1 \\ f(-3) &= (-3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8 \\ f(-1) &= (-1)^2 - 1 = 0 \\ f(0) &= (0)^2 - 1 = -1 \\ f(2) &= (2)^2 - 1 = 3 \\ f(3) &= (3)^2 - 1 = 8 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} f(a) &= a^2 - 1 \\ 3 &= a^2 - 1 \\ a^2 &= 3 + 1 \\ a^2 &= 4 \\ a^2 &= 4 \\ a &= \pm 2 \end{aligned}$$

Jadi, nilai a yang memenuhi adalah $a = 2$ dan $a = -2$.

c. Sketsa grafik tampak pada Gambar 6.5.

d. Daerah hasil dari fungsi $y = f(x) = x^2 - 1$ adalah $R_f = \{y | -1 \le y \le 8, y \in R\}$



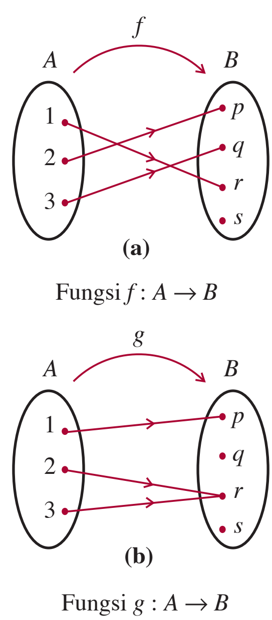
Gambar 6.5

3. Sifat-Sifat Fungsi

a. Fungsi Injektif

Misalkan, himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ dan himpunan $B = \{p, q, r, s\}$. Dari himpunan A ke himpunan B ditentukan fungsi f dan fungsi g yang dinyatakan dengan diagram panah pada Gambar 6.6.

Pada Gambar 6.6(a), untuk setiap anggota himpunan A yang berbeda mempunyai peta yang berbeda di himpunan B. Fungsi yang demikian dinamakan *fungsi injektif* atau *fungsi satu-satu*.



Gambar 6.6

Pada Gambar 6.6(b), terdapat dua anggota himpunan A yang berbeda, yaitu 2 dan 3 mempunyai peta yang sama, yaitu r di himpunan B. Oleh karena itu, fungsi g *bukan fungsi injektif*.

Sekarang, amati kembali Gambar 6.2. Dari grafik fungsi $f(x) = 2x$ pada gambar tersebut, untuk setiap domain x_1 dan x_2 $(x_1 \neq x_2)$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$. Misalkan untuk $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ maka $f(x_1) = -2$, $f(x_2) = 2$, dan $f(x_1) \neq f(x_2)$. Jadi, untuk nilai x yang berbeda menghasilkan nilai $y = f(x)$ yang berbeda pula. Fungsi yang demikian disebut *fungsi injektif* atau *fungsi satu-satu*.

Amati pula grafik fungsi $f(x) = x^2$ pada Gambar 6.3(a). Pada fungsi ini, untuk setiap domain x_1 dan x_2 $(x_1 \neq x_2)$ terdapat hubungan $f(x_1) = f(x_2)$, misalnya $f(-1) = f(1) = 1$ dan $f(-2) = f(2) = 4$. Jadi, untuk nilai x yang berbeda terdapat nilai $y = f(x)$ yang sama. Fungsi yang demikian *bukan* merupakan fungsi injektif.

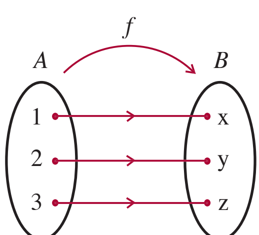
Soal Terbuka

Buatlah 5 buah fungsi yang satu-satu dan fungsi yang tidak satu-satu.

Secara umum, jika f fungsi dari himpunan A ke himpunan B maka setiap unsur di dalam A dikawankan dengan tepat suatu unsur tertentu yang khas di dalam B. Jika dua unsur yang berbeda di dalam A masing-masing dikawankan dengan tepat satu unsur yang berbeda pula di dalam B maka f disebut *fungsi injektif* atau *fungsi satu-satu*.

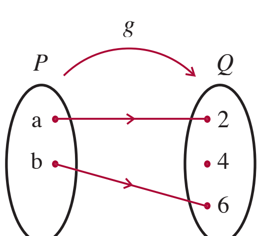
b. Fungsi Surjektif

Misalkan, himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ dan himpunan $B = \{x, y, z\}$. Dari himpunan A ke himpunan B ditentukan fungsi f yang ditentukan dengan diagram panah pada Gambar 6.7(a).



(a)

Fungsi $f : A \to B$



(b)

Fungsi $g : P \to Q$

Gambar 6.7

Pada Gambar 6.7(a), tampak bahwa daerah hasil dari fungsi f, yaitu $R_f = \{x, y, z\}$ sehingga $R_f = B$, dalam hal ini B adalah daerah kawan. Suatu fungsi yang daerah hasilnya sama dengan daerah kawannya dinamakan *fungsi surjektif* atau *fungsi onto*. Jadi, fungsi f pada Gambar 6.7(a) merupakan fungsi surjektif. Coba Anda selidiki Gambar 6.7(b). Apakah fungsi $g : P \to Q$ merupakan fungsi surjektif? Jelaskan jawaban Anda.

Sekarang, amatilah grafik $f(x) = 2x$ (Gambar 6.2). Grafik tersebut memiliki daerah hasil (range) R_f sama dengan daerah kawannya (kodomainnya). Oleh karena itu, fungsi $f(x) = 2x$ disebut *fungsi surjektif* atau *fungsi onto*. Secara umum, jika pada suatu fungsi f dari A ke B daerah hasilnya $R_f = B$ maka fungsi itu disebut *fungsi surjektif* atau *fungsi onto*. Akan tetapi, jika $R_f \subset B$ maka fungsi tersebut bukan merupakan *fungsi surjektif*.

Suatu fungsi yang bersifat injektif dan surjektif disebut *fungsi bijektif*. Jadi, fungsi $y = 2x$ merupakan *fungsi bijektif*.

Contoh 6.3

Selidikilah fungsi berikut, apakah merupakan fungsi injektif atau bukan, jika injektif apakah juga merupakan fungsi bijektif?

a. $y = f(x) = \frac{1}{2}x + 3, x \in R,$

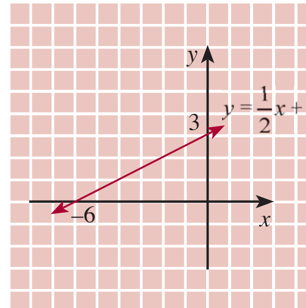
b. $y = f(x) = x^2 - 2, x \in R,$

Jawab:

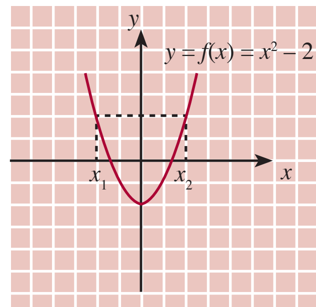
a. Grafik fungsi $y = f(x) = \frac{1}{2}x + 3, x \in R$ tampak pada Gambar 6.8 (a). Amati untuk setiap domain x_1 dan x_2 $(x_1 \neq x_2)$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$. Jadi, fungsi $y = f(x) = \frac{1}{2}x + 3, x \in R$ merupakan fungsi injektif. Oleh karena range R_f sama dengan daerah kawannya (kodomainnya) maka fungsi $y = f(x) = \frac{1}{2}x + 3, x \in R$ merupakan fungsi surjektif.

Dengan demikian, fungsi $y = f(x) = \frac{1}{2}x + 3, x \in R$ adalah fungsi bijektif.

b. Grafik dari fungsi $y = f(x) = x^2 - 2, x \in R$ diperlihatkan pada Gambar 6.8(b). Pada gambar tersebut, tampak bahwa terdapat nilai-nilai $x_1, x_2 \in D_f$ dengan $x_1 \neq x_2$, tetapi $f(x_1) = f(x_2)$. Jadi, fungsi $y = f(x) = x^2 - 2, x \in R$ *bukan* fungsi injektif.



(a)



(b)

Gambar 6.8

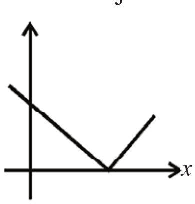
Mari, Cari Tahu

Selidikilah bersama 2 orang teman, sejarah penggunaan lambang $y = f(x)$. Anda dapat mencarinya di buku atau internet. Laporkan hasilnya di depan kelas.

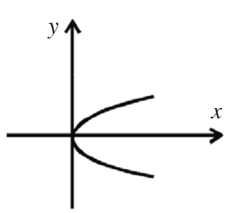
Tes Kompetensi Subbab A

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Di antara grafik berikut ini, manakah yang menyatakan suatu fungsi dari $R \to R, x, y \in R$? Jelaskan jawaban Anda.



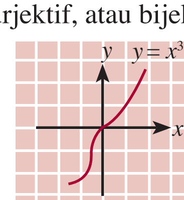
(a)



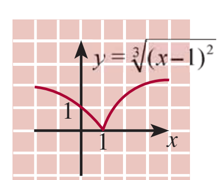
(b)

2. Dari sketsa grafik berikut ini, manakah yang merupakan relasi? Tentukan pula mana yang merupakan fungsi dari $x \to y$. Jika fungsi, tentukan sifatnya injektif, surjektif, atau bijektif.

a.



b.



3. Buatlah sketsa grafik relasi-relasi berikut. Kemudian, tunjukkan mana yang merupakan fungsi dari $R \to R$.
   a. $\{(x,y) \mid y = x^2 - 1;\ x,y \in R\}$
   b. $\{(x,y) \mid y = x^2 - 2x - 3;\ x, y \in R\}$
   c. $\{(x,y) \mid y^2 = -2x;\ x, y \in R\}$
   d. $\{(x,y) \mid x = -2;\ x, y \in R\}$
   e. $\{(x,y) \mid y = 5 - x^2;\ x, y \in R\}$
   f. $\{(x,y) \mid y = x^5;\ x, y \in R\}$
4. Periksalah fungsi berikut, apakah merupakan fungsi injektif atau bukan. Jika injektif, apakah merupakan fungsi bijektif?
   a. $y = 4 - x^2;\ x,\ y \in R$
   b. $y = (x + 1)^2;\ x, y \in R$
   c. $y = \dfrac{2x}{x-4};\ x, y \in R$ dan $x \neq 4$
   d. $y = 8 - x^3;\ x, y \in R$
5. Tentukan daerah asal fungsi-fungsi berikut ini.
   a. $f(x) = 3x - 2$
   b. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 2x - 3}$
6. Gambarkan grafik fungsi berikut ini. Kemudian, tentukan daerah asalnya agar menjadi fungsi injektif.
   a. $y = f(x) = x^2 - 5x + 6$
   b. $y = f(x) = 4 \cos x,\ 0 \leq x \leq 2\pi$
7. Jelaskan cara yang Anda lakukan untuk menentukan apakah suatu fungsi satu-satu atau bukan.

B. Aljabar Fungsi

Anda telah mempelajari fungsi $f(x) = x^2 - 2$ mempunyai daerah asal $D_f = \{x \mid x \in R\}$. Demikian halnya dengan fungsi $g(x) = \sqrt{x-3}$ dengan daerah asal $D_g = \{x \mid x \in R\}$ telah Anda pelajari pula. Pada bab ini, Anda akan mempelajari cara membentuk fungsi baru dari hasil operasi aljabar dua fungsi f dan g yang diketahui tersebut, yaitu sebagai berikut.

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 2 + \sqrt{x-3}$

  $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 2 - \sqrt{x-3}$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 2)\sqrt{x-3}$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2-2}{\sqrt{x-3}}, g(x) \neq 0$

Anda pun akan mempelajari cara menentukan daerah asal fungsi hasil operasi. Untuk itu pelajari uraian berikut.

Misalkan, $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi-fungsi yang diketahui, berlaku hal-hal berikut.

- Jumlah dari fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ adalah $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ dengan $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
- Selisih dari fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ adalah $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ dengan $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.

- Perkalian dari fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ adalah $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ dengan $D_{f \times g} = D_f \cap D_g$.
- Pembagian dari fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ adalah $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, dengan $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g$ dan $g(x) \neq 0$

Contoh 6.4

Diketahui fungsi $f(x) = x^2 - 5$ dan $g(x) = 2\sqrt{x}$, tentukan operasi fungsi-fungsi berikut. Tentukan pula daerah asalnya.

a. $(f + g)(x)$ **c.** $(f \times g)(x)$

b. $(f - g)(x)$ **d.** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Jawab:

$D_f = \{x \mid x \in R\}$ dan $D_g = \{x \mid x \geq 0, x \in R\}$.

a. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 5 + 2\sqrt{x}$

$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{x \mid x \in R\} \cap \{x \mid x \geq 0, x \in R\}$
$= \{x \mid x \geq 0, x \in R\}$

b. $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 5 - 2\sqrt{x}$

$D_{f-g} = \{x \mid x \geq 0, x \in R\}$

c. $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = 2x^2\sqrt{x} - 10\sqrt{x}$

$D_{f \times g} = \{x \mid x \geq 0, x \in R\}$

d. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{x}\left(x - \frac{5}{x}\right)$

$D_{\frac{f}{g}} = \{x \mid x > 0, x \in R\}$

Tes Kompetensi Subbab B

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Tentukan $(f + g)(x), (f - g)(x), (f \times g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$, $f^2(x)$, dan $g^2(x)$ serta tentukan pula daerah asal fungsi hasil operasi tersebut jika diketahui fungsi-fungsi seperti berikut.
   a. $f(x) = 3x + 2$ dan $g(x) = 3\sqrt{x - 1}$
   b. $f(x) = \frac{x + 1}{x}$ dan $g(x) = \sqrt{x + 1}$
2. Diketahui fungsi $f(x) = 2x^2 - 1$ dan $g(x) = \sqrt{2x - 1}$. Tentukanlah:
   a. $(f + g)(3)$
   b. $(f - g)(2)$
   c. $(f \times g)(5)$

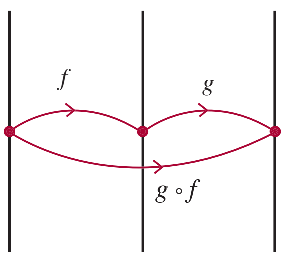
C. Fungsi Komposisi

1. Pengertian Fungsi Komposisi

Sebelum Anda mempelajari fungsi komposisi lebih lanjut, pelajari uraian berikut ini.

Misalkan $f(x) = x^2 + 1$ dengan $D_f = \{x| x \in R\}$ dan $g(x) = \sqrt{x-2}$ dengan $D_g = \{x| x \geq 2, x \in R\}$. Fungsi komposisi $g \circ f$ dapat digambarkan pada Gambar 6.9.

Mula-mula unsur $x \in D_f$ dipetakan oleh f ke bayangan x, yaitu $f(x)$. Kemudian, $f(x)$ dipetakan oleh g ke $g(f(x))$. Dengan demikian, fungsi komposisi $g \circ f$ adalah pemetaan $x \in D_f$ oleh fungsi f, kemudian bayangannya dipetakan lagi oleh g. Uraian tersebut memperjelas definisi berikut.



Gambar 6.9

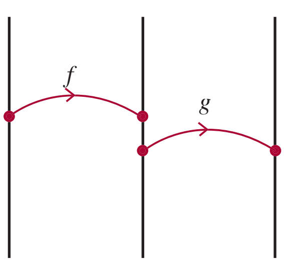
Definisi 6.3

Diketahui, f dan g dua fungsi sebarang maka fungsi komposisi f dan g ditulis $g \circ f$, didefinisikan sebagai $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ untuk setiap $x \in D_g$.

Untuk $x = 1$ Anda peroleh $f(x) = 2$ yang berada dalam daerah asal fungsi g. Bayangan x, yaitu $f(x) = 2$ dapat dipetakan oleh g ke $g(f(x))$ sebab $g(2) = \sqrt{2-2} = 0$.

Lain halnya jika $x = \frac{1}{2}$. Untuk $x = \frac{1}{2}$ diperoleh $f(x) = 1\frac{1}{4}$ yang berada di luar daerah asal fungsi g. Bayangan x, yaitu $f(x) = 1\frac{1}{4}$ tidak dapat dipetakan oleh g ke fungsi komposisi $g(f(x))$ sebab $g\left(1\frac{1}{4}\right) = \sqrt{1\frac{1}{4} - 2} = \sqrt{-\frac{3}{4}}$. Nilai ini tidak terdefinisi jika Anda membatasi daerah kerja pada himpunan seluruh bilangan real. Dari uraian itu dapat dipahami bahwa pemetaan berantai baru dapat dilakukan jika bayangan x jatuh ke dalam daerah asal fungsi g. Dengan demikian, diperoleh daerah asal fungsi komposisi $g \circ f$ adalah $D_{gof} = \{x | x \in D_f, f(x) \in D_g\}$.

Dengan pemikiran yang sama, fungsi komposisi $f \circ g$ adalah pemetaan $x \in D_g$ oleh fungsi g, kemudian bayangannya dipetakan lagi oleh f. Dengan demikian, daerah asal fungsi komposisi $f \circ g$ adalah $D_{fog} = \{x | x \in D_g, f(x) \in D_f\}$.



Gambar 6.10

Misalkan diketahui $f(x) = x^2 + 2$ dan $g(x) = \sqrt{1-x}$. Kedua fungsi itu dapat digambarkan seperti Gambar 6.10.

Daerah hasil $R_f = \{x| \, x \geq 2, x \in R\}$ tidak dapat dipetakan oleh $g(x) = \sqrt{1-x}$ sebab untuk $x \geq 2$, $g(x)$ tidak terdefinisi.

Coba jelaskan mengapa $\mathbf{g(x)}$ *tidak terdefinisi untuk* $\mathbf{x} \geq 2$.

Jika Anda analisis uraian tersebut, diperoleh hal-hal berikut.

- Fungsi $f(x) = x^2 + 1$ dan $g(x) = \sqrt{x-2}$ dapat dikomposisikan menjadi fungsi komposisi $g \circ f$ sebab irisan antara daerah hasil fungsi f dan daerah asal fungsi g bukan merupakan himpunan kosong.
  $R_f \cap D_g = \{x| x \geq 1, x \in R\} \cap \{x| x \geq 2, x \in R\} = \{x| x \geq 2, x \in R\}$.
- Fungsi $f(x) = x^2 + 2$ dan $g(x) = \sqrt{1-x}$ tidak dapat dikomposisikan menjadi fungsi komposisi $g \circ f$ sebab irisan antara daerah hasil fungsi f dan daerah asal fungsi g merupakan himpunan kosong.
  $R_f \cap D_g = \{x| \, x \geq 2, x \in R\} \cap \{x| \, x \leq 1, x \in R\} = \varnothing$.

Syarat yang harus dipenuhi agar fungsi *f* dan fungsi *g* dapat dikomposisikan menjadi fungsi komposisi ($g \circ f$) adalah irisan antara daerah hasil fungsi *f* dan daerah asal fungsi *g* bukan himpunan kosong, atau $R_f \cap D_g \neq \varnothing$.

Contoh 6.5

1. Jika $f(x) = 2x^3$ dan $g(x) = x + 3$, tentukan $g \circ f(x)$.
2. Jika $g(x) = 2x + 4$ dan $h(x) = x^2 + 2x + 5$, tentukan $h \circ g(x)$.

Jawab:

1. $g \circ f(x) = g\{f(x)\} = f(x) + 3 = 2x^3 + 3$
2. $$\begin{aligned} h \circ g(x) = h\{g(x)\} &= \{g(x)\}^2 + 2\{g(x)\} + 5 \\ &= (2x+4)^2 + 2(2x+4) + 5 \\ &= 4x^2 + 16x + 16 + 4x + 8 + 5 \\ &= 4x^2 + 20x + 29 \end{aligned}$$

Contoh 6.6

Diketahui $f(x) = 2x + 5$ dan $g(x) = 3x^2$. Tentukan:

1. $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$
2. a. daerah asal $(f \circ g)(x)$ dan daerah hasil $(f \circ g)(x)$
   b. daerah asal $(g \circ f)(x)$ dan daerah hasil $(g \circ f)(x)$

Jawab:

1. $$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(3x^2) = 2(3x^2) + 5 = 6x^2 + 5 \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(2x+5) = 3(2x+5)^2 \\ &= 3(4x^2 + 20x + 25) = 12x^2 + 60x + 75 \end{aligned}$$

Pembahasan Soal

Fungsi $g: R \longrightarrow R$ ditentukan oleh $g(x) = x^2 - x + 3$ dan fungsi $f: R \longrightarrow R$ sehingga $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 3x + 4$ maka $f(x - 2) = ...$

Jawab:

$g(x) = x^2 - x + 3$
$(f \circ g)(x) = 3x^2 - 3x + 4$
$f(g(x)) = 3(x^2 - x + 3) - 5$
$f(x) = 3x - 5$
maka $f(x - 2) = 3(x - 2) - 5$
$= 3x - 11$

Soal Ebtanas 1999

Tugas

Anda telah mengetahui syarat fungsi *f* dan fungsi *g* dapat dikomposisikan menjadi fungsi $g \circ f$. Bagaimana dengan syarat agar fungsi $f \circ g$ dapat dikomposisikan? Selidikilah bersama teman Anda kemudian laporkan hasilnya kepada guru Anda.

2. a. Daerah asal $(f \circ g)(x) = D_{f \circ g} = \{x | x \in R\}$ dan daerah hasil $(f \circ g)(x) = R_{f \circ g} = \{y | y \in R\}$.

b. Daerah asal $(g \circ f)(x) = D_{g \circ f} = \{x | x \in R\}$ dan daerah hasil $(g \circ f)(x) = R_{g \circ f} = \{y | y \in R\}$.

2. Sifat-Sifat Komposisi Fungsi

Untuk mempelajari sifat-sifat komposisi fungsi, pelajari uraian berikut. Diketahui, $f(x) = x + 5$ dan $g(x) = 2x + 6$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 6) = (2x + 6) + 5 = 2x + 11$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 5) = 2(x + 5) + 6 = 2x + 16$$

Amati lagi hasil contoh 6.5. Apakah nilai $(f \circ g)(x)$ sama dengan $(g \circ f)(x)$? Coba selidiki untuk fungsi lainnya. Apa yang Anda peroleh? Jika melakukannya dengan benar, akan diperoleh kesimpulan berikut.

$$\boxed{(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)}$$

Amati fungsi $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2$, dan $h(x) = 3x + 5$.
Misalkan, $(g \circ h)(x) = s(x)$ maka

$$s(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(3x + 5) = (3x + 5)^2$$
$$= 9x^2 + 30x + 25$$

sehingga

$$(f \circ (g \circ h))(x) = (f \circ s)(x) = f(s(x)) = f(9x^2 + 30x + 25)$$
$$= 2(9x^2 + 30x + 25) + 1 = 18x^2 + 60x + 50 + 1$$
$$= 18x^2 + 60x + 51$$

Jadi, $(f \circ g \circ h)(x) = 18x^2 + 60x + 51$.
Kemudian, misalkan $(f \circ g)(x) = t(x)$ maka
$t(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$ sehingga

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (t \circ h)(x) = t(h(x)) = t(3x + 5)$$
$$= 2(3x + 5)^2 + 1$$
$$= 2(9x^2 + 30x + 25) + 1 = 18x^2 + 60x + 51$$

Jadi, $(f \circ (g \circ h))(x) = 18x^2 + 60x + 51$.

Amati lagi uraian tersebut. Apa yang Anda peroleh mengenai nilai $f \circ (g \circ h)(x)$ jika dihubungkan dengan nilai $(f \circ g) \circ h(x)$? Apakah hal ini berlaku untuk fungsi yang lainnya? Untuk itu, bersama dengan teman sebangku buat 3 buah fungsi. Kemudian, hitung nilai $f \circ (g \circ h)$ dan $(f \circ g) \circ h$. Apakah hasil keduanya sama? Ulangi lagi untuk fungsi lainnya. Apakah Anda dapat memperoleh kesimpulan berikut?

$$\boxed{(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x)}$$

Situs Matematika

Anda dapat mengetahui informasi lain tentang Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers melalui internet dengan mengunjungi situs berikut.

- http://whypermadi.worldpress.com
- http://matematika-sma.blogspot.com
- http://mathworld.wolfram.com

Contoh 6.7

Diketahui $f(x) = 5x^2 + 6$ dan $I(x) = x$.

a. Carilah $(f \circ I)(x)$ dan $(I \circ f)(x)$.

b. Apakah $(f \circ I)(x) = (I \circ f)(x)$?

Jawab:

a. $(f \circ I)(x) = f(I(x)) = f(x) = 5x^2 + 6$
$(I \circ f)(x) = I(f(x)) = I(5x^2 + 6) = 5x^2 + 6$

b. Dari hasil (a) tampak bahwa $(f \circ I)(x) = (I \circ f)(x)$.
Dalam hal ini fungsi $I(x) = x$ disebut fungsi identitas terhadap operasi komposisi fungsi.

Dari uraian tersebut, dapatkah Anda menduga sifat-sifat komposisi fungsi? Cobalah nyatakan sifat-sifat komponen fungsi dengan kata-kata Anda sendiri.

- **Operasi komposisi pada fungsi-fungsi pada umumnya tidak komutatif.**
  $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$
- **Operasi komposisi pada fungsi-fungsi bersifat asosiatif**
  $(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x)$
- **Dalam operasi komposisi pada fungsi-fungsi terdapat sebuah fungsi identitas, yaitu $I(x) = x$ sehingga $(f \circ I)(x) = (I \circ f)(x) = f(x)$**

Soal Terbuka

1. Diketahui fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 2$. Tentukan fungsi f dan g yang mungkin.
2. Diketahui fungsi komposisi $(g \circ f)(x) = x - 2$. Tentukan fungsi f dan g yang mungkin. Sebutkan pula cara Anda memperoleh jawaban ini.

3. Menentukan Fungsi *f* atau *g* jika Diketahui Fungsi Komposisi dari *f* atau *g*

Pada bagian sebelumnya, Anda telah belajar menentukan fungsi komposisi $f \circ g$ atau $g \circ f$ jika fungsi f dan g diketahui. Bagaimana jika terjadi sebaliknya? Fungsi yang diketahui adalah fungsi komposisi dan salah satu fungsi yang membentuk komposisi fungsi tadi, bagaimana cara menentukan fungsi lainnya?

Anda dapat menentukan fungsi $g(x)$ jika diketahui fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = 10x - 5$ dan $f(x) = 2x - 5$, yaitu sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= 10x - 5 \\
f(g(x)) &= 10x - 5 \\
2(g(x)) - 5 &= 10x - 5 \\
2(g(x)) &= 10x \\
g(x) &= 5x
\end{aligned}
$$

Untuk menentukan fungsi $f(x)$ jika diketahui fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = 30x^2 - 15$ dan $g(x) = 10x^2 - 3$ caranya sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= 30x^2 - 15\\
f(g(x)) &= 30x^2 - 15\\
f(10x^2 - 3) &= 30x^2 - 15 = 3(10x^2 - 3) - 15 + 9\\
f(10x^2 - 3) &= 3(10x^2 - 3) - 6\\
f(x) &= 3x - 6
\end{aligned}
$$

Jika fungsi f dan fungsi komposisi $f \circ g$ atau $g \circ f$ diketahui maka fungsi g dapat ditentukan. Demikian juga jika fungsi g dan fungsi komposisi $f \circ g$ atau $g \circ f$ diketahui maka fungsi f dapat ditentukan.

Contoh 6.8

Diketahui $f \circ g\ (x) = \dfrac{1}{x}$ dan $f\ (x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Tentukan $g(x)$.

Jawab:

$$
\begin{aligned}
f \circ g\ (x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f\,(g\ (x)) &= \frac{1}{x}\\
\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{g(x)}} &= \frac{1}{x}\\
\Leftrightarrow x &= \sqrt{g(x)}\\
\Leftrightarrow g(x) &= x^2
\end{aligned}
$$

Tes Kompetensi Subbab C

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Tentukan $f \circ g(x)$ dan $g \circ f\ (x)$ dari fungsi-fungsi berikut ini.
   a. $f\ (x) = 3 - 4x$ dan $g(x) = 2x^3 + 2$
   b. $f(x) = 3x + 4$ dan $g(x) = x^3 + x$
   c. Untuk soal nomor 1a dan 1b, tentukan $f \circ g(-2)$ dan $g \circ f(-2)$.
2. Diketahui $f\ (x) = 5 - x$ dan $g(x) = x^2 - 4$. Tentukan nilai x jika diketahui sebagai berikut.
   a. $f \circ g(x) = -16$
   b. $g \circ g\ (-x) = 21$
3. Diketahui $f\ (x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = x^2 - 2$, dan $h(x) = \sqrt{1-2x}$. Tentukanlah nilai x dari fungsi-fungsi berikut ini.
   a. $f \circ g \circ h\ (x) = 2$
   b. $f \circ g \circ f\ (x) = 5$
4. **a.** Jika $f\ (x) = 2x^2 + 7$ dan $f \circ g\ (x) = 3(3 - 2x)$, tentukanlah $g(x)$.
   b. Jika $g(x) = 2\ (x - 1)$ dan
   $g \circ f\,(x) = 2x\ (x - 5)$, tentukanlah $f\,(3)$.

c. Jika $f(x) = \frac{x-5}{x}$ dan $g \circ f(x) = \frac{x-5}{x-1}$, tentukanlah $g(2x - 1)$.

d. Jika $g(x) = x - 1$ dan $f \circ g(x) = x^2 - 1$, tentukanlah $f\left(\sqrt{x+1}\right)$.

5. Diketahui $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = 6x^2 - 5$, carilah nilai a yang mungkin jika

a. $f \circ g(a) = 285$

b. $g \circ f(a) = 1$

6. Fungsi f dan g dinyatakan dalam pasangan terurut berikut.

$f = \{(a, b), (c, d), (e, f), (g, h), (i, j)\}$

$g = \{(b, -1), (d, -3), (f, -5), (h, -7), (j, -9)\}$

Nyatakan fungsi-fungsi komposisi berikut ini dalam pasangan terurut.

a. $f \circ f$ c. $f \circ g$

b. $g \circ g$ d. $g \circ f$

7. a. Jika $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = \sin x$, dan $f(g(a)) = -\frac{7}{4}$, tentukan nilai a.

b. Jika $f(x) = 3 - x^2$, $g(x) = \frac{x}{x-1}$, dan $h(x) = 3x + 1$, tentukan $f \circ g \circ h(10)$.

8. Harga sebuah produk p yang terjual sebanyak x memenuhi persamaan

$p = -\frac{1}{4}x + 100,\ 0 \le x \le 400$

Misalkan, c adalah biaya membuat x buah produk tersebut yang memenuhi persamaan $c = \frac{\sqrt{x}}{25} + 600$. Jika semua produk terjual, tentukan biaya c sebagai fungsi dari harga p.

9. Volume sebuah balon (dalam cm^3) adalah $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Jika jari-jari r bertambah terhadap waktu t (dalam sekon) memenuhi rumus $r(t) = \frac{1}{3}t^3$, $t \ge 0$. Tentukan volume balon sebagai fungsi waktu.

10. Sebuah drum yang berbentuk tabung mempunyai volume 500 cm^3. Bagian alas dan atasnya dibuat dari bahan yang berharga Rp6.000,00 per cm^2. Adapun bagian sisa dibuat dari bahan berharga Rp4.000,00 per cm^2.

a. Ekspresikan biaya total bahan c sebagai fungsi dari r (jari-jari tabung).

b. Berapa harga total bahan untuk membuat drum dengan jari-jari 4 cm atau 8 cm?

D. Fungsi Invers

Di SMP, tentunya Anda telah belajar cara mengubah satuan dari derajat Celsius ke Fahrenheit, yaitu dengan menggunakan persamaan $y = \frac{9}{5}x + 32$. Bagaimana cara mengubah satuan dari Fahrenheit ke Celsius? Untuk mengetahuinya, Anda harus belajar fungsi invers.

Apakah setiap fungsi selalu memiliki fungsi invers? untuk mengetahuinya, lakukan aktivitas matematika berikut.

Aktivitas Matematika

Lakukanlah kegiatan berikut bersama kelompok Anda.

Langkah ke-1

a. *Melengkapi tabel fungsi $y = f(x)$*

Misalkan fungsi f dari x ke y didefinisikan sebagai $y = f(x)$, seperti Tabel 6.1. Salin dan lengkapilah Tabel 6.1 di buku tugas Anda.

Tabel 6.1 Fungsi $y = f(x)$

x (masukan)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y (keluaran)	0	2	4	6	8	...	...	...	...

b. *Menukarkan nilai-nilai masukan dan keluaran*

Tukarkan nilai-nilai masukan dan keluaran tersebut seperti Tabel 6.2, kemudian salin dan lengkapilah Tabel 6.2 di buku tugas Anda.

Tabel 6.2

y (masukan)	0	2	4	6	8	...	...	...	...
x (keluaran)	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Coba Anda selidiki, apakah Tabel 6.2 merupakan fungsi dari y ke x? Tuliskan hasil penyelidikan Anda di buku tugas Anda.

Langkah ke-2

a. *Melengkapi tabel fungsi $s = g(r)$*

Misalkan fungsi g dari r ke s didefinisikan sebagai $s = g(r)$, seperti Tabel 6.3. Salin dan lengkapilah Tabel 6.3 di buku tugas Anda.

Tabel 6.3 Fungsi $s = g(r)$

r (masukan)	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
s (keluaran)	...	9	4	1	0	1	4	9	...

b. *Menukarkan nilai-nilai masukan dan keluaran*

Tukarkan nilai-nilai masukan dan keluaran tersebut seperti Tabel 6.2, lalu salin dan lengkapi Tabel 6.4 di buku tugas Anda.

Tabel 6.4

s (masukan)	...	9	4	1	0	1	4	9	...
r (keluaran)	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4

Coba Anda selidiki, apakah Tabel 6.4 merupakan fungsi dari s ke r? Tuliskan hasil penyelidikan Anda di buku tugas Anda.

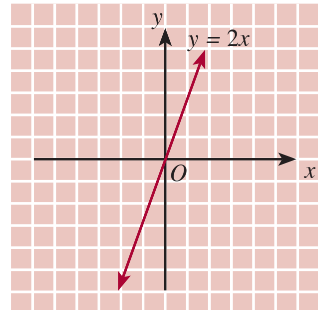
Langkah ke-3

Dapatkah Anda menduga, fungsi yang bagaimana yang memiliki fungsi invers? Jawablah dengan cara menganalisis Tabel 6.1 sampai dengan Tabel 6.4.

Ingatlah

Lambang –1 di dalam f^{-1} bukan berupa pangkat.

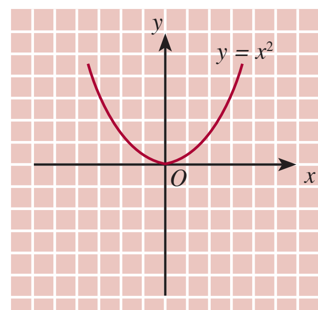
Jika fungsi f memetakan setiap $x \in D_f$ ke $y \in R_f$ maka balikan dari fungsi f *mengembalikan* unsur y tersebut ke unsur x semula. Proses pembalikan tersebut belum tentu menghasilkan fungsi baru. Jika f fungsi bijektif maka pembalikan tersebut menghasilkan fungsi baru. Akan tetapi, jika f bukan fungsi bijektif pembalikan itu hanya menghasilkan suatu relasi. Agar lebih jelas, pelajari uraian berikut.



Gambar 6.12

Telah diketahui fungsi $y = 2x$ seperti Gambar 6.12 merupakan fungsi bijektif.

Amati bahwa setiap dua unsur yang berbeda di dalam domain f dikawankan dengan dua unsur yang berbeda di dalam daerah kawan f. Sebagai contoh, $x_1 = 2$ dan $x_2 = -2$ dikawankan berturut-turut dengan $y_1 = 4$ dan $y_2 = -4$. Balikan dari fungsi ini akan menghubungkan dua unsur yang berbeda tersebut dengan dua unsur semula yang berbeda, yaitu 4 dengan 2 dan –4 dengan –2.



Gambar 6.13

Balikan dari fungsi tersebut jelas sesuai dengan aturan fungsi, yang hanya membolehkan setiap unsur di dalam daerah asalnya dihubungkan dengan satu dan hanya satu unsur di dalam daerah hasil. Jadi, balikan dari fungsi $f(x) = 2x$ merupakan fungsi. Lain halnya dengan fungsi $y = x^2$ seperti Gambar 6.13. Fungsi ini bukan merupakan *fungsi bijektif*.

Amati bahwa setiap unsur x dan $-x$ di dalam domain f dikawankan dengan unsur y yang sama di dalam daerah kawan f. Contohnya, unsur 2 dan –2 keduanya dipetakan ke unsur yang sama, yaitu 4. Akibatnya, balikan dari fungsi ini menghubungkan 4 dengan dua unsur yang berbeda, yaitu 2 dan –2. Balikan dari fungsi ini jelas menyalahi aturan fungsi. Jadi, balikan dari fungsi $f(x) = x^2$ bukan merupakan fungsi, tetapi hanya relasi saja.

Dari uraian tersebut dapatkah Anda menduga bentuk umum fungsi invers? Cobalah nyatakan bentuk tersebut dengan kata-kata Anda sendiri. Konsep yang telah Anda pelajari tersebut memperjelas definisi berikut.

Definisi 6.4

Misalkan, f merupakan fungsi bijektif dengan daerah asal D_f dan daerah hasil R_f. Fungsi invers(fungsi balikan) f adalah f^{-1} jika dan hanya jika $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ untuk setiap x di dalam D_f dan $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ untuk setiap x di dalam R_f.

Dari Definisi 6.4 tampak bahwa setiap $x \in D_f$ dipetakan oleh f ke $f(x)$ dan $f(x)$ oleh f^{-1} dikembalikan ke x. Demikian halnya untuk setiap $x \in R_f$ dipetakan oleh f^{-1} ke $f^{-1}(x)$ dan

$f^{-1}(x)$ oleh f dikembalikan ke x. Dengan demikian, invers suatu fungsi invers menghasilkan fungsi asalnya, dituliskan $(f^{-1})^{-1} = f$. Dari uraian tersebut, Anda dapat menentukan invers suatu fungsi dengan langkah-langkah sebagai berikut.

- Diketahui, $y = f(x)$.
- Selesaikan persamaan sehingga diperoleh x sebagai fungsi y atau $x = f^{-1}(y)$.
- Ganti variabel y dengan x pada $f^{-1}(y)$ sehingga diperoleh $f^{-1}(x) = y$ sebagai fungsi invers dari $y = f(x)$.

Contoh 6.9

Tentukan invers dari fungsi berikut ini.

$y = f(x) = 5x - 7$

Kemudian, gambarkan grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$.

Jawab:

$y = 5x - 7 \Leftrightarrow 5x = y + 7$

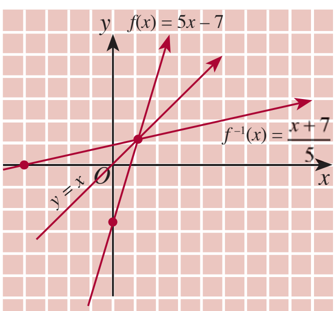
$\Leftrightarrow x = \dfrac{y+7}{5}$

$\Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \dfrac{y+7}{5}$

Jadi, fungsi invers dari $y = f(x) = 5x - 7$ adalah $f^{-1}(x) = \dfrac{x+7}{5}$.

Gambar grafik $f(x) = 5x - 7$ dan $f^{-1}(x) = \dfrac{x+7}{5}$ tampak pada Gambar 6.14. Amati Gambar 6.14 dengan saksama, bagaimana posisi grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ terhadap $y = x$. Apakah simetris? Jika Anda amati grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ dengan saksama, tampak bahwa grafik $f^{-1}(x)$ simetris terhadap grafik $f(x)$. Grafik $f^{-1}(x)$ diperoleh dari grafik $f(x)$ dengan mencerminkannya terhadap garis $y = x$. Oleh karena itu, untuk mencari $f^{-1}(x)$ jika diketahui $f(x)$ dapat pula dikerjakan dari persamaan $f \circ f^{-1}(x) = x$.

Coba Anda selesaikan invers dari $f(x) = 5x - 7$ dengan menggunakan $f \circ f^{-1}(x) = x$.



Gambar 6.14

Soal Terbuka

Bersama teman sebangku, buatlah 5 fungsi yang mempunyai invers. Berikan alasannya. Kemudian, berikan hasilnya pada teman yang lain untuk dicek dan dikomentari.

Contoh 6.10

1. Diketahui $f(x) = 3x^2 + 4$ dan $g(x) = \sqrt{\dfrac{x-4}{3}}$.

   Periksalah apakah g merupakan balikan (invers) dari f.

2. Tentukan fungsi invers dari $f(x) = \dfrac{3x+4}{2x-1}$.

Jawab:

1. Untuk menentukan apakah g fungsi invers f, periksalah apakah fungsi komposisi $(g \circ f)(x) = x$ dan $(f \circ g)(x) = x$.

$$(g \circ f)(x) = g\{f(x)\} = g(3x^2 + 4) = \sqrt{\frac{3x^2 + 4 - 4}{3}} = \sqrt{x^2} = x$$

$$(f \circ g)(x) = f\{g(x)\} = f\left(\sqrt{\frac{x-4}{3}}\right) = 3\left(\sqrt{\frac{x-4}{3}}\right)^2$$

$$= 3\left(\frac{x-4}{3}\right) + 4$$

$$= x - 4 + 4 = x$$

Jadi, g merupakan balikan f sehingga f juga balikan g. Dengan kata lain, $g = f^{-1}$ dan $f = g^{-1}$.

2. $y = f(x) = \dfrac{3x+4}{2x-1} \Leftrightarrow y(2x–1) = 3x + 4$

$\Leftrightarrow\ 2yx - y = 3x + 4 \quad \Leftrightarrow 2yx - 3x = y + 4$

$\Leftrightarrow x(2y - 3) = y + 4 \qquad \Leftrightarrow x = \dfrac{y+4}{2y-3}$

$\Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \dfrac{y+4}{2y-3}$

Jadi, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{2x-3}$.

Tantangan untuk Anda

Diketahui $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Tentukan f^{-1}. Jika $c \neq 0$, apakah syarat a, b, c, dan d sehingga $f = f^{-1}$.

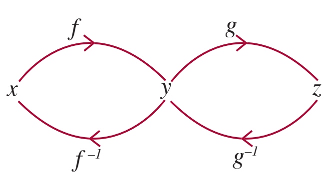
Tes Kompetensi Subbab D

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Tentukan invers dari fungsi-fungsi berikut. Kemudian, gambarkan grafik fungsi f dan f^{-1} dalam satu diagram.
   - a. $f(x) = 2x - 5$
   - b. $f(x) = 3x^2 - 4$
   - c. $f(x) = \dfrac{2}{3x-2}$
   - d. $f(x) = 2 - x^2$
   - e. $f(x) = \sqrt{x+1}$
   - f. $f(x) = 10^{x+1}$
   - g. $f(x) = \dfrac{1}{5x-3};\ x \neq \dfrac{3}{5}$
   - h. $f(x) = x^2 - 6x + 5;\ x \geq 3$
   - i. $f(x) = x^2 - 9;\ x \leq 0$
2. Tunjukkan bahwa fungsi g merupakan invers bagi fungsi f.
   - a. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ dan $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$
   - b. $f(x) = 5 - x^2$ dan $g(x) = \sqrt{5-x}$
   - c. $f(x) = \sqrt{5x^2 - 6}$ dan $g(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+6}{5}}$
   - d. $f(x) = 10^{3x}$ dan $g(x) = \dfrac{1}{3}\log x$
   - e. $f(x) = 2^{2x}$ dan $g(x) = {}^2\log\sqrt{x}$
   - f. $f(x) = \dfrac{3x+4}{2x-1}$ dan $g(x) = \dfrac{x+4}{2x-3}$

3. Diketahui $f(x) = 4x^2 + 8$, $g(x) = \dfrac{x+5}{2x-1}$, dan $h(x) = \sqrt{x^2 - 2}$. Tentukan nilai-nilai fungsi berikut.
   a. $f^{-1}(12)$
   b. $g^{-1}(15)$
   c. $g^{-1}(6)$
   d. $h^{-1}(\sqrt{7})$
   e. $f^{-1}(24) + g^{-1}(18)$
   f. $f^{-1}(9) + g^{-1}(3) - h^{-1}(\sqrt{2})$
4. Tunjukkan bahwa fungsi invers dari fungsi-fungsi berikut sama dengan fungsi asalnya.
   a. $f(x) = x$
   b. $f(x) = 15 - x$
   c. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
   d. $f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$
   e. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$
   f. $f(x) = \dfrac{10}{x}$
5. Misalkan, $f(x) = ax + b$; $a \neq 0$ dan $g(x) = cx + d$; $c \neq 0$. Apa syaratnya agar f merupakan balikan g, demikian pula sebaliknya g merupakan balikan f.
6. Untuk mengubah satuan dari derajat Celsius ke derajat Fahrenheit, digunakan rumus $y = f(x) = \dfrac{9}{5}x + 32$. Sebaliknya, untuk mengubah satuan dari derajat Fahrenheit ke derajat Celsius, digunakan rumus $y = g(x) = \dfrac{5}{9}(x - 32)$. Tunjukkan bahwa f adalah invers dari g.
7. Permintaan barang di suatu negara memenuhi persamaan $p(x) = 300 - 50x$, dengan p adalah harga barang (dalam dolar) dan x banyak barang yang diproduksi (dalam jutaan). Ekspresikan banyak barang x sebagai fungsi dari p.
8. Dari beberapa macam fungsi yang telah dipelajari, fungsi manakah yang memiliki invers?

E. Invers dari Fungsi Komposisi



Gambar 6.15

Seperti halnya fungsi yang lain, fungsi komposisi dapat memiliki invers, asalkan syarat fungsi invers dipenuhi. Amati Gambar 6.15.

Diketahui, fungsi f dan g keduanya bijektif. Fungsi f memetakan x ke y dan fungsi g memetakan y ke z. Oleh karena f dan g bijektif maka balikan fungsi f adalah f^{-1} dan balikan fungsi g adalah g^{-1}. Amati bahwa fungsi komposisi $g \circ f$ memetakan x ke z sehingga balikan $g \circ f$, yaitu $(g \circ f)^{-1}$ memetakan z ke x. Dari Gambar 6.15 tampak bahwa g^{-1} memetakan z ke y dan f^{-1} memetakan y ke x. Dengan demikian, pemetaan komposisi $f^{-1} \circ g^{-1}$ memetakan z ke x. Jadi, invers fungsi komposisi $(g \circ f)$ adalah

$$\boxed{(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)}$$

Analog dengan cara tersebut, invers fungsi komposisi $(f \circ g)$ adalah

$$\boxed{(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)}$$

Contoh 6.11

Diketahui $f(x) = 3x^2 - 6$ dan $g(x) = 3x - 19$. Tentukan

a. $(f \circ g)^{-1}(x)$ **b.** $(g \circ f)^{-1}(x)$

Jawab:

- $f \circ f^{-1}(x) = x$
  $f(f^{-1}(x)) = x$
  $3(f^{-1}(x))^2 - 6 = x$
  $$(f^{-1}(x))^2 = \frac{x+6}{3}$$
  $$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{\frac{x+6}{3}}$$
- $g \circ g^{-1}(x) = x$
  $g(g^{-1}(x)) = x$
  $3(g^{-1}(x)) - 19 = x$
  $$g^{-1}(x) = \frac{x+19}{3}$$

a. $(f \circ g)^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x) = g^{-1}(f^{-1}(x))$

$$= g^{-1} \pm\sqrt{\frac{x+6}{3}} = \pm\sqrt{\frac{x+6}{3}} + \frac{19}{3} = \frac{1}{3}\left(\pm\sqrt{\frac{x+6}{3}} + 19\right)$$

b. $(g \circ f)^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}\left(\frac{x+19}{3}\right)$

$$= \pm\sqrt{\frac{\frac{x+19}{3}+6}{3}} = \pm\sqrt{\frac{x+37}{9}} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{x+37}$$

Contoh 6.12

Jika $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $g^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{x}$, dan $h(x) = g\{f(x)\}$, tentukan $h^{-1}(x)$.

Jawab:

Pertama, hitung $g(x)$ sebagai berikut.

$$g^{-1}(x) = \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow x\,g^{-1}(x) = 1 - x$$
$$\Leftrightarrow x\,g^{-1}(x) + x = 1$$
$$\Leftrightarrow x\,(g^{-1}(x) + 1) = 1$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{g^{-1}(x)+1}$$

Hal Penting

- fungsi
- domain
- kodomain
- range
- injektif
- surjektif
- bijektif
- invers

Jadi, $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

Kemudian, hitung $h(x)$ sebagai berikut.

$$h(x) = g\{f(x)\} \Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{f(x)+1} = \frac{1}{\frac{1}{x-1}+1} = \frac{1}{\frac{1}{x-1}+\frac{x-1}{x-1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{x}{x-1}} = \frac{x-1}{x}$$

Hitung $h^{-1}(x)$ sebagai berikut.

$$h(x) = \frac{x-1}{x} \quad \Leftrightarrow x\,h(x) = x - 1 \quad \Leftrightarrow x\,h(x) - x = -1$$

$$\Leftrightarrow x(h(x) - 1) = -1 \quad \Leftrightarrow x = \frac{-1}{h(x)-1}$$

Jadi, $h^{-1}(x) = h^{-1}(x) = \dfrac{-1}{x-1} = \left(\dfrac{-1}{x-1}\right)\left(\dfrac{-1}{-1}\right) = \dfrac{1}{-x+1} = \dfrac{1}{1-x}$.

Tes Kompetensi Subbab E

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Tentukan $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$, $(f \circ g)^{-1}(x)$, dan $(g \circ f)^{-1}(x)$ jika diketahui:
   a. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ dan $g(x) = 2x + 3$
   b. $f(x) = 5 - 2x$ dan $g(x) = \dfrac{x-3}{x}$
   c. $f(x) = \dfrac{1}{4-x}$ dan $g(x) = x^2 - 1$
   d. $f(x) = 5x - 4$ dan $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x-4}}$
   e. $f(x) = \dfrac{1}{2x}$ dan $g(x) = \sqrt{16 - x^2}$
   f. $f(x) = \dfrac{3x-2}{x-6}$ dan $g(x) = \dfrac{2x}{x-2}$
2. Diketahui $f(x) = \dfrac{2}{4-x}$ dan $g(x) = x - 8$.
   Tentukanlah:
   a. $(f \circ g)^{-1}(-2)$
   b. $(g \circ f)^{-1}(2)$
   c. $(g \circ f)^{-1}\left(\dfrac{-1}{2}\right)$
   d. $(f \circ g)^{-1}(x - 3)$
   e. $(g \circ f)^{-1}(2x + 1)$
   f. $(f \circ g)^{-1}(x^2 - 1)$

Rangkuman

- Fungsi atau pemetaan dari A ke B didefinisikan sebagai suatu relasi dari himpunan A ke B, dengan setiap $x \in A$ dipasangkan pada satu dan hanya satu $y \in B$.
- Himpunan unsur-unsur dalam A disebut daerah asal (domain).
- Himpunan peta dari A ke B disebut daerah hasil (*range*).

Sekarang tuliskan rangkuman materi yang telah dipelajari di buku latihan Anda. Beberapa siswa membacakan hasilnya di depan kelas.

Refleksi

Setelah Anda mempelajari Bab 6,

1. tuliskanlah materi mana yang menurut Anda sulit dan yang mudah,
2. bagian manakah yang menurut Anda sangat menarik dan penting untuk dipelajari.

Tes Kompetensi Bab 6

A. Pilihlah salah satu jawaban dan berikan alasannya.

1. Jika $f(x) = x + 2$ maka $f(x^2) + 3f(x) - (f(x))^2$ sama dengan ....

a. $-x + 4$ **d.** $-x + 5$
b. $x + 4$ **e.** $x + 5$
c. $-x + 2$

2. Jika $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ dan $f \circ g\ (x) = \frac{1}{x-2}\sqrt{x^2-4x+5}$ maka $g(x-3)$ adalah ....

a. $\frac{1}{x-5}$ **d.** $\frac{1}{x^2}$
b. $\frac{1}{x+1}$ **e.** $\frac{1}{x+3}$
c. $\frac{1}{x-1}$

3. Jika $h(x + 2) = x^2 + 2x$ maka $h(x) =$ ....

a. $2x + x^2$ **d.** $-x^2 - 2x$
b. $2x - x^2$ **e.** $x^2 - 2x$
c. $-x^2 + 2x$

4. Jika $f(x) = 3x^2 - 2x$ maka $f(x - 2) - 4f(2x - 1) + f(2) =$ ....

a. $45\ x^2 - 50x + 4$
b. $45x^2 + 50x - 4$
c. $45x^2 + 50x + 4$
d. $-45x^2 - 50x + 4$
e. $-45x^2 + 50x + 4$

5. Fungsi berikut ini yang dapat digolongkan ke dalam fungsi satu-satu adalah ....

a. $f(x) = k$, k konstanta sebarang
b. $f(x) = x + 9$
c. $f(x) = x^2 - 9x$
d. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
e. $f(x) = x^2 + 2x + 1$

6. Jika $f(x) = 2ax + \frac{1}{x^2}$, $g(x) = bx - \frac{3}{x}$, dan $C = 2a + b$ maka jumlah kedua fungsi tersebut adalah ....

a. ax **d.** $abx = \frac{3}{x}$
b. bx **e.** $ax = C$
c. Cx

7. Jika $f(x + y) = f(x) + f(y)$, untuk semua bilangan rasional x dan y serta $f(1) = 10$, maka $f(2)$ adalah ....

a. 0
b. 5
c. 10
d. 20
e. tidak dapat ditentukan

8. Diketahui $f(g(x)) = \frac{3-x}{3x-5}$ dan $g(x) = \frac{x-1}{3x-5}$ maka nilai $f(0)$ adalah ....

a. -4 **d.** 2
b. -2 **e.** 4
c. 0

9. Fungsi f: $R \rightarrow R$ dengan $f(x) = 4x + n$
g: $R \rightarrow R$ dengan $g(x) = 3x - 10$

Jika $f \circ g\ (x) = g \circ f(x)$ maka nilai n yang memenuhi persamaan itu adalah ....

a. -15
b. -10
c. 5
d. 10
e. 15

10. Jika $f(x) = 5 - 2x$, $g(x) = x^2 - 25$, dan $h(x) = \frac{1}{4} g(f(x))$ maka $h^{-1}(x) = ...$
a. $\frac{5}{2} \pm \sqrt{x + \frac{25}{4}}$
b. $\frac{5}{2}\left(1 \pm \sqrt{x + \frac{25}{4}}\right)$
c. $\frac{25}{4} \pm \sqrt{x + \frac{25}{4}}$
d. $\frac{25}{4}\left(1 \pm \sqrt{x + \frac{5}{2}}\right)$
e. $\frac{25}{4} \pm \sqrt{x + \frac{25}{4}}$

11. Jika $f = \{(2, 4), (3, 5), (4, -1), (5, 2)\}$
$g = \{(2, -3), (3, 3), (4, 2), (5, 4), (-1, 1)\}$
maka $f \circ g = ...$
a. $\{(1, 1), (2, 3), (3, 1), (4, 3), (5, 4)\}$
b. $\{(1, 1), (2, 3), (3, 1), (4, 3), (5, 5)\}$
c. $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 3), (5, 2)\}$
d. $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 4)\}$
e. $\{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 5)\}$

12. Jika suatu fungsi ditentukan sebagai himpunan pasangan berurut $f = \{(1, 3), (2, 5), (4, 2), (5, 0)\}$ maka $f^{-1} = ...$
a. $\{(3, 1), (5, 2), (2, 4), (5, 0)\}$
b. $\{(1, 3), (5, 2), (2, 4), (5, 0)\}$
c. $\{(1, 3), (2, 5), (2, 4), (5, 0)\}$
d. $\{(3, 1), (5, 2), (2, 4), (0, 5)\}$
e. $\{(3, 1), (5, 2), (4, 2), (5, 0)\}$

13. Jika $f = \{(1, 3), (4, 5), (7, -2), (9, -4)\}$, $g = \{(1, 4), (6, 0), (7, 3), (9,12), (10, -6)\}$, dan $h = \frac{f}{g}$ maka h sama dengan ....
a. $\left\{\left(1, \frac{3}{4}\right), \left(7, \frac{2}{3}\right), \left(9, \frac{1}{3}\right)\right\}$
b. $\left\{\left(1, \frac{3}{4}\right), \left(7, -\frac{2}{3}\right), \left(9, \frac{1}{3}\right)\right\}$
c. $\left\{\left(1, \frac{3}{4}\right), \left(7, -\frac{2}{3}\right), \left(9, -\frac{1}{3}\right)\right\}$
d. $\left\{\left(1, -\frac{3}{4}\right), \left(7, -\frac{2}{3}\right), \left(9, -\frac{1}{3}\right)\right\}$
e. $\left\{\left(1, -\frac{3}{4}\right), \left(7, \frac{2}{3}\right), \left(9, \frac{1}{3}\right)\right\}$

14. Apabila $g(x) = 3x + 1$ dan $g(f(x)) = 5x^2 + x - 3$ maka $f(x) = ...$
a. $\frac{1}{3}(x^2 - x - 4)$
b. $\frac{1}{3}(x^2 - x + 4)$
c. $\frac{1}{3}(x^2 - x - 2)$
d. $\frac{1}{3}(5x^2 + x + 4)$
e. $\frac{1}{3}(5x^2 + x - 4)$

15. Jika $f(x) = 2x - 3$ dan $g \circ f(x) = 2x + 1$ maka $g(x) = ...$
a. $x - 4$
b. $x + 4$
c. $2x - 3$
d. $x - 6$
e. $2x - 1$

16. Pernyataan-pernyataan berikut benar, *kecuali* ....
a. $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x)$
b. $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$
c. jika $f(x) = x + 1$ maka $f^{-1}(x) = x - 1$
d. jika $f(x) = 2x - 1$ maka $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$
e. jika $f(x) = x^3$ maka $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

17. Jika $f(x) = \frac{px + q}{rx + s}$, maka $f^{-1}(x) = ...$
a. $\frac{sx + q}{rx + p}$
b. $\frac{sx - q}{rx - p}$
c. $\frac{sx + q}{rx - p}$
d. $\frac{sx - q}{rx + p}$
e. $\frac{sx - q}{p - rx}$

18. Diketahui $f(x) = \log x$, $g(x) = 2x - \pi$, dan $h(x) = \sin x$, $f \circ g \circ h(x) = 0$, nilai x yang memenuhi adalah ....

a. $\frac{\pi}{4}$ d. $\frac{\pi}{8}$

b. $\frac{2\pi}{4}$ e. $\frac{3\pi}{8}$

c. $\frac{3\pi}{4}$

19. Fungsi berikut ini yang memiliki invers fungsi adalah ....

a. $y = x^2 + 2x + 1$ d. $y = 5$

b. $y = x^2 + 5x$ e. $y = 2x^2 + 4x + 3$

c. $y = 2x + 3$

20. Jika $f(x) = x + 1$ dan $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ maka

(1) $f \circ f(x) = x + 2$

(2) $f \circ g(x) = \frac{1}{x+1}$

(3) $f \circ f^{-1}(x) = x$

(4) $g \circ f^{-1}(x) = x$

Pernyataan yang benar adalah ....

a. 1, 2, dan 3 d. 2, 3, dan 4

b. 1 dan 3 e. 1, 2, 3 dan 4

c. 2 dan 4

21. Jika $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x^2 + 1$ maka $(g \circ f \circ f)(x) = ...$

a. $\sqrt{x} - 1$ d. $\sqrt{\sqrt{x}+1}$

b. $\sqrt{x} + 1$ e. $\sqrt{\sqrt{x+1}}$

c. $\sqrt{x+1}$

22. Diketahui $f(x) = 2x + 5$dan $g(x) = \frac{x-1}{x+4}$. Jika $f \circ g(a) = 5$ maka $a = ...$

a. -2 d. 1

b. -1 e. 2

c. 0

23. Fungsi berikut ini yang *tidak* memiliki fungsi invers adalah ....

a. $y = 5x^2 + 7$ d. $y = {}^5\log x$

b. $y = x^3 + 4$ e. $y = 2x + 10$

c. $y = 10 - 150x$

24. Jika $f(x) = 2x - 3$, dengan $x \in R$ dan f^{-1} adalah fungsi invers dari $f(x)$ maka kedua kurva $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ akan berpotongan pada titik ....

a. $(1, -3)$ d. $(3, -3)$

b. $(-1, 3)$ e. $(3, 3)$

c. $(-3, 3)$

25. Jika $f : x \to 5^{2x}$ maka f^{-1} adalah ....

a. ${}^5\log 2x$ d. $y = x^m$

b. ${}^5\log \sqrt{x}$ e. ${}^2\log 5x$

c. $2x \log 5$

26. Invers dari $y = \frac{x}{m}$ dengan m konstanta sebarang adalah ....

a. $y = \frac{m}{x}$ d. $y = x^2$

b. $y = \frac{x}{m}$ e. $y = x + m$

c. $y = mx$

27. Diketahui $f = \{(3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 8)\}$ maka $f^{-1}(3)$ adalah ....

a. 1 d. 6

b. 5 e. 8

c. 4

28. Jika $f(x) = 8^x$ dan $g(x) = 3x^2 + 4$ maka $f^{-1}(g(x)) = ...$

a. ${}^8\log (3x^2 + 4)$ d. ${}^8\log 3x^2 + 4$

b. ${}^8\log (3x^2 - 4)$ e. $\log (3x^2 + 4)$

c. ${}^8\log 3x^2 - 4$

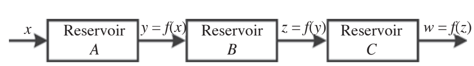
29. Diketahui $f(x) = 15^x$ dan $h(x) = x^3 + 4$ untuk setiap x bilangan real, $x \neq 0$ maka $f^{-1}(h(x^2) - 4) = ...$

a. ${}^{15}\log (x^5 + 2)$ d. ${}^{15}\log x^6$

b. ${}^{15}\log (x^5 - 4)$ e. ${}^{15}\log x^5$

c. ${}^{15}\log (x^3 + 4)$

30.



Jika $y = f(x) = \frac{1}{2}x + 3$, $z = f(y) = \frac{1}{3}y + 2$, $w = f(z) = \frac{1}{4}z + 1$

maka fungsi komposisi dari x ke w adalah ....

a. $\frac{1}{24}(x + 42)$ d. $\frac{1}{24}(4x + 16)$

b. $\frac{1}{24}(2x + 7)$ e. $\frac{1}{12}(6x + 18)$

c. $\frac{1}{24}(3x + 21)$

B. Jawablah dengan singkat, tepat, dan jelas.

1. Dari fungsi-fungsi berikut, tentukan $f(-2), f(-1), f(0), f(1)$, dan $f(2)$. Kemudian, gambarkan grafiknya. Jika daerah asalnya $D_f = \{x | -2 \leq x \leq 2, x \in R\}$, tentukan daerah hasilnya.
   a. $f(x) = 3x - 1$
   b. $f(x) = 3 - 2x$
   c. $f(x) = x - 2$
   d. $f(x) = 4 - 2x^2$
   e. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
   f. $f(x) = x^3 - 1$

2. Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2+2}$ dan $g(x) = \sqrt{14-4x}$. Tentukanlah:
   a. $(f+g)(2)$
   b. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(-3)$
   c. $(f-g)(-2)$
   d. $(f \times g)(-10)$
   e. $f^2(4)g(-1)$
   f. $g^2(-7) : f(2)$

3. Tentukan $f \circ g \circ h(x)$ dan $h \circ g \circ f(x)$ dari fungsi-fungsi berikut ini.
   a. $f(x) = x - 3$, $g(x) = 2x + 1$, dan $h(x) = x^2 - 2$
   b. $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = x^2 + 1$, dan $h(x) = x^2 + 2x + 5$
   c. $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x + 2$, dan $h(x) = x^2 - 2$
   d. $f(x) = \sqrt{4x-8}$, $g(x) = x^2$, dan $h(x) = \sqrt{x+1}$

4. Jumlah mobil yang diproduksi suatu pabrik selama 1 hari setelah t jam operasi adalah $n(t) = 200t - 10t^2$, $0 \leq t < 10$. Jika biaya produksi n mobil (dalam dolar) adalah $C(n) = 30.000 + 8.000\,n$, tentukan biaya C sebagai fungsi dari waktu. Berapakah biaya memproduksi mobil selama 1 bulan?

5. Dengan menggunakan sifat $f^{-1} \circ f(x) = x$, tentukan $f^{-1}(x)$ untuk fungsi-fungsi berikut.
   a. $f(x) = 3x + 7$
   b. $f(x) = (x + 2)^2$
   c. $f(x) = (x + 2)(x - 2)$
   d. $f(x) = \dfrac{5x^2}{x^2-2}$
   e. $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x^3+6}$
   f. $f(x) = \dfrac{x^3+12}{x^3-8}$

Bab 7

Sumber: davelicence.zenfolio.com

Limit

Setelah mempelajari bab ini, Anda harus mampu menjelaskan limit fungsi di satu titik dan di tak hingga beserta teknis perhitungannya; menggunakan sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri.

A. **Limit Fungsi**
B. **Limit Fungsi Trigonometri**

Anda telah mempelajari nilai fungsi f di a pada Bab 5. Sebagai contoh, diketahui $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x}$. Untuk $x = -1$ diperoleh $f(-1) = 1$. Untuk $x = 1$ diperoleh $f(1) = 3$. Berapakah nilai f untuk $x = 0$?

Ternyata, Anda tidak dapat menentukan nilai f di $x = 0$ sebab pembagian bilangan hanya terdefinisi jika pembagi tidak sama dengan 0. Akan tetapi, Anda masih dapat mempelajari bagaimana nilai f jika x mendekati 0 dengan menggunakan limit. Konsep limit suatu fungsi dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan berikut.

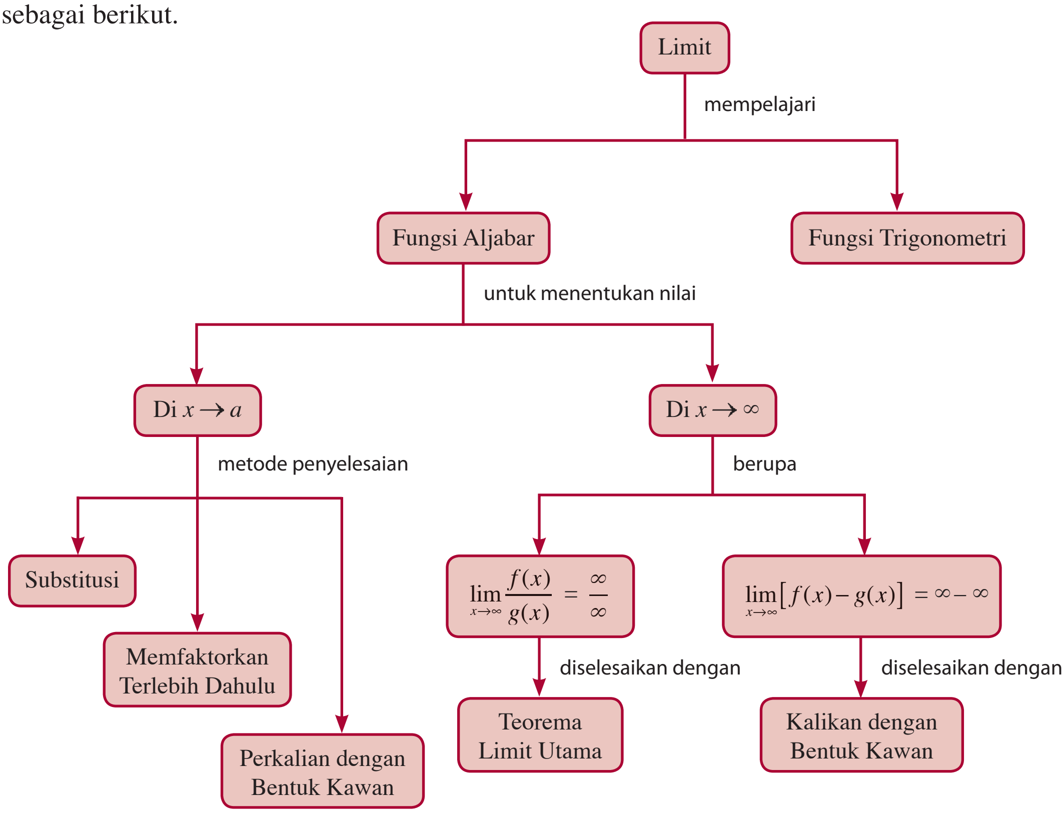
Misalkan persamaan posisi motor setelah bergerak t jam dinyatakan oleh $S = f(t) = 24t^2 + 4t$. Kecepatan motor pada saat $t = 1$ jam dapat diperoleh dari limit kecepatan rata-rata dalam selang $t = 1$ sampai $t = 1 + \Delta t$ dengan mengambil Δt mendekati nol ($\Delta t \to 0$). Pernyataan tersebut dapat dinyatakan secara matematis sebagai berikut.

$$V_{(t=1)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(1+\Delta t) - f(1)}{\Delta t}$$

Dengan menggunakan konsep limit, Anda dapat menentukan kecepatan pada saat $t = 1$ jam.

Diagram Alur

Untuk mempermudah Anda dalam mempelajari bab ini, pelajarilah diagram alur yang disajikan sebagai berikut.



Tes Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Sederhanakanlah pecahan berikut dengan merasionalkan penyebut.
   a. $\dfrac{10}{3+\sqrt{6}}$ **b.** $\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-4}$
2. Faktorkanlah bentuk-bentuk berikut.
   a. $x^2 - y^2$
   b. $a^3 - b^3$
   c. $x^2 + 2xy + y^2$
3. Nyatakan bentuk-bentuk berikut dengan menggunakan sudut tunggal.
   a. $\sin 2\alpha$
   b. $\tan 2\alpha$
   c. $\cos 2\alpha$
4. Isilah titik-titik berikut.
   a. $\sin(\alpha \pm \beta)$ = ...
   b. $\cos(\alpha \pm \beta)$ = ...
   c. $\tan(\alpha \pm \beta)$ = ...
5. Ubahlah ke bentuk penjumlahan.
   a. $2 \sin \alpha \cos \beta$
   b. $2 \cos \alpha \cos \beta$
6. Ubahlah ke bentuk perkalian.
   a. $\sin \alpha + \sin \beta$
   b. $\cos \alpha - \cos \beta$
   c. $\tan \alpha - \tan \beta$

A. Limit Fungsi

Dalam kehidupan sehari-hari, seringkali Anda mendengar kata-kata *hampir* atau *mendekati*. Misalnya, Ronaldo *hampir* mencetak gol, kecepatan motor itu *mendekati* 120 km/jam, dan sebagainya. Kata *hampir* atau *mendekati* dalam matematika disebut limit.

1. Pengertian Limit

Dalam matematika, limit merupakan nilai hampiran suatu variabel pada suatu bilangan real. Notasi

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L}$$

dijabarkan sebagai "limit fungsi $f(x)$ pada saat x mendekati a sama dengan L". Suatu limit dikatakan ada jika limit tersebut memiliki *limit kiri* dan *limit kanan* yang sama. Limit kiri adalah pendekatan nilai fungsi real dari sebelah kiri yang dinotasikan $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$. Sedangkan limit kanan adalah pendekatan nilai fungsi real dari sebelah kanan yang dinotasikan $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$. Untuk lebih memahaminya perhatikan uraian berikut.

Misal, diberikan suatu limit fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 4x, \text{ jika } x \leq 4 \\ 4x + 6, \text{ jika } x > 4 \end{cases}$$

Untuk mengetahui apakah limit tersebut ada, selidiki apakah limit kanan dan limit kirinya sama.

- $\lim\limits_{x \to 4^-} 4x = 4(4) = 16$, karena $x < 4$
- $\lim\limits_{x \to 4^+} 4x + 6 = \lim\limits_{x \to 4^+} 4x + \lim\limits_{x \to 4^+} 6 = 16 + 6 = 22$

Oleh karena nilai limit kiri dan nilai limit kanan berbeda, limit fungsi tersebut tidak ada.

Selanjutnya, perhatikan bentuk fungsi berikut.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Limit fungsi tersebut, tidak terdefinisi di $x = 3$ karena daerah asal fungsi f adalah$\{x \mid x \neq 3)$.

Untuk mengetahui apakah limit tersebut ada, selidiki apakah limit kanan dan limit kirinya sama, seperti pada tabel berikut.

Tokoh Matematika

Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Definisi yang tepat tentang limit pertama kali diperkenalkan oleh Cauchy. Cauchy adalah seorang mahaguru di Ecole Polytechnique, Sarbone, dan College de France. Sumbangan-sumbangan matematisnya sangat cemerlang sehingga semua buku ajar moderen mengikuti penjelasan kalkulus yang terperinci oleh Cauchy.

Sumber: *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1*, 1987

Tabel 7.1

x	2,99	2,999	2,9999 →	← 3,0001	3,001	3,01
$f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$	5,99	5,999	5,9999 →	← 6,0001	6,001	6,01

Berdasarkan tabel di atas, dapat Anda ketahui bahwa pada saat x mendekati 3, nilai fungsi $f(x)$ mendekati 6. Jadi,

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x + 3 \text{ ; jika } x \neq 3$$

Oleh karena $x + 3$ mendekati 6 jika x mendekati 3 maka $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ mendekati 6 jika x mendekati 3.

Meskipun fungsi $f(x)$ tidak terdefinisi untuk $x = 3$, tetapi fungsi tersebut mendekati nilai 6 pada saat x mendekati 3. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa nilai limit fungsi tersebut adalah 6.

Selanjutnya, perhatikan pula bentuk fungsi berikut.

$$\lim_{x \to 3} x + 3$$

Untuk mengetahui apakah limit tersebut ada, selidiki apakah limit kanan dan limit kirinya sama, seperti pada tabel berikut.

Tabel 7.2

x	2,99	2,999	2,9999 →	← 3,0001	3,001	3,01
$f(x) = x + 3$	5,99	5,999	5,9999 →	← 6,0001	6,001	6,01

Berdasarkan tabel di atas, dapat Anda ketahui bahwa pada saat x mendekati 3, nilai fungsi $f(x)$ mendekati 6. Jadi,

$$\lim_{x \to 3} x + 3 = 6.$$

Dapat disimpulkan bahwa limit $\lim\limits_{x \to 3} x + 3 = 6$ dapat diperoleh tanpa menggunakan Tabel 7.2. Ketika x mendekati 3, nilai $x + 3$ akan mendekati 6.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 3) = 6$$

Secara umum, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ mengandung arti bahwa jika x mendekati atau menuju ke a, tetapi berlainan dengan a maka $f(x)$ menuju ke L.

Contoh 7.1

Tentukan limit berikut.

1. $\lim_{x\to 2}(2x-4)$
2. $\lim_{x\to 4}(x^2-5x+6)$

Jawab:

1. $\lim_{x\to 2}(2x-4)$, artinya jika x mendekati 2 maka $(2x-4)$ mendekati $(2\cdot 2-4)=0$. Dengan demikian, $\lim_{x\to 2}(2x-4)=0$.
2. $\lim_{x\to 4}(x^2-5x+6)$, artinya jika x mendekati 4 maka (x^2-5x+6) akan mendekati $(4^2-5.4+6)=2$.

   Jadi, $\lim_{x\to 4}(x^2-5x+6)=2$.

Contoh 7.2

Diketahui $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x}{x} & x\neq 0\\ 5 & x=0\end{cases}$

Tentukan:

a. nilai fungsi di titik 0
b. nilai limit di titik 0.

Jawab:

a. $f(0)=5$
b. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{x}=2$

Contoh 7.3

Diketahui limit $\lim_{x\to 5}\dfrac{x^2+25}{x-5}$

Tentukan nilai limit tersebut.

Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}\frac{x^2+25}{x-5} &= \lim_{x\to 5}\frac{(x+5)(x-5)}{x-5}\\ &= \lim_{x\to 5} x+5\\ &= 5+5\\ &= 10\end{aligned}$$

Ingatlah

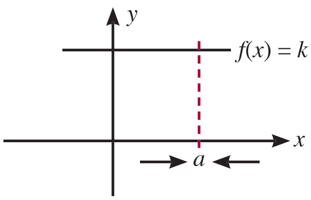
Untuk menghitung $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{x}$, sebaiknya $\dfrac{x^2+2x}{2}$ difaktorkan, lalu disederhanakan, sebelum menyubstitusikan $x=0$ karena jika $x=0$ disubstitusikan secara langsung maka diperoleh $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{x}-\dfrac{0^2+2\cdot 0}{0}=\dfrac{0}{0}$ dan ini bentuk tidak tentu.

Tantangan untuk Anda

Dengan teman sebangku, cari nilai n (bilangan asli positif) yang memenuhi $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^n-2^n}{x-2}$.

2. Limit Fungsi Aljabar

Limit konstanta k untuk x mendekati a ada dan nilainya sama dengan k, ditulis $\lim\limits_{x \to a} k = k$. Secara grafik, hal tersebut dapat Anda lihat pada Gambar 7.4. Pandang fungsi $f(x) = k$ maka $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} k = k$. Limit x untuk x mendekati a pun ada dan nilainya sama dengan a, ditulis $\lim\limits_{x \to a} x = a$. Untuk mengetahui adanya limit secara mudah, Anda dapat menggunakan teorema berikut.



Gambar 7.1
Grafik fungsi $f(x) = k$

Teorema Limit Utama

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi dan k konstanta maka

1. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$
2. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$
3. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
4. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$; $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$
5. $\lim\limits_{x \to a} k\, f(x) = k \lim\limits_{x \to a} f(x)$; k = **konstanta**
6. $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n$; **dengan n bilangan bulat positif**
7. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$; **dengan** $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq 0$

a. Menentukan Limit dengan Substitusi Langsung

Ada beberapa fungsi yang nilai limitnya dapat ditentukan dengan cara substitusi langsung seperti contoh berikut.

Contoh 7.4

Tentukan limit fungsi-fungsi berikut.

1. $\lim\limits_{x \to -4} \left(x^3 + 4x^2 + x - 6\right)$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$

Jawab:

1. $\lim\limits_{x \to -4} \left(x^3 + 4x^2 + x - 6\right)$
   $= (-4)^3 + 4(-4)^2 + (-4) - 6 = -10$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1} = \dfrac{0^3 + 1}{0 + 1} = 1$

Mari, Cari Tahu

Buatlah kelompok yang terdiri atas 5 orang. Cari informasi di buku atau internet riwayat orang yang berjasa merumuskan konsep limit, di antaranya Augustin Louis Cauchy. Tuliskan dan laporkan riwayatnya atau salah satu karyanya yang terkenal. Kemudian, fotonya dapat Anda tempel di ruang kelas.

b. Menentukan Limit dengan Cara Memfaktorkan Terlebih Dahulu

Jika dengan cara substitusi langsung pada $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ diperoleh bentuk $\dfrac{0}{0}$ (bentuk tak tentu), lakukan pemfaktoran terlebih dahulu terhadap $f(x)$ dan $g(x)$. Kemudian, sederhanakan ke bentuk paling sederhana. Agar lebih jelas, perhatikan uraian berikut.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)P(x)}{(x-a)Q(x)} = \lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

Dalam hal ini $P(a) \neq 0$ dan $Q(a) \neq 0$.

Pertanyaan: Mengapa $f(x)$ dan $g(x)$ boleh dibagi oleh $(x - a)$?

Pembahasan Soal

$\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t^3 - 8}{t^2 + t - 6} = ...$

Jawab:

$$\lim_{t \to 2} \frac{t^3 - 8}{t^2 + t - 6}$$

$$= \lim_{t \to 2} \frac{(t-2)(t^2 + 2t + 4)}{(t-2)(t+3)}$$

$$= \lim_{t \to 2} \frac{t^2 + 2t + 4}{t+3} = \frac{12}{5}$$

Soal PPI, 1979

Aktivitas Matematika

Bersama kelompok belajar Anda, lakukan kegiatan menghitung limit bentuk $\dfrac{0}{0}$. Permasalahannya adalah menentukan $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Langkah-langkah yang dapat Anda lakukan adalah sebagai berikut.

Langkah ke-1

Menyubstitusikan $x = 1$ ke dalam fungsi yang dicari nilai limitnya, yaitu

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{... - ...}{... - ...} = \frac{0}{0}$$

Langkah ke-2

Agar tidak muncul bentuk $\dfrac{0}{0}$, faktorkanlah $x^2 - 1$, kemudian sederhanakan sebagai berikut.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(... + ...)(... - ...)}{(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} (... + ...)$$

Langkah ke-3

Setelah fungsi yang dicari limitnya disederhanakan, substitusikan $x = 1$ pada limit fungsi yang sederhana itu, sebagai berikut.

$$\lim_{x \to 1} (... + ...) = ... + ... = ...$$

Jadi, $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = ...$

Contoh 7.5

Tentukan limit fungsi-fungsi berikut.

1. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
2. $\lim_{x \to -3} \frac{x + 3}{\sqrt{x + 3}}$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 + 3x}{2x^2 - 8x}$

Jawab:

1. Jika dengan cara substitusi langsung, diperoleh

   $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$ (bentuk tak tentu). Agar tidak muncul bentuk $\frac{0}{0}$, faktorkanlah $x^2 - 4$ sebagai berikut.

   $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x - 2)}(x + 2)}{\cancel{(x - 2)}} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$

2. Dengan cara substitusi langsung, diperoleh

   $$\lim_{x \to -3} \frac{x + 3}{\sqrt{x + 3}} = \frac{-3 + 3}{\sqrt{-3 + 3}} = \frac{0}{0}$$

   Agar tidak muncul bentuk $\frac{0}{0}$, faktorkanlah $x + 3$ sebagai berikut.

   $$\lim_{x \to -3} \frac{x + 3}{\sqrt{x + 3}} = \lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x + 3}\,\cancel{\sqrt{x + 3}}}{\cancel{\sqrt{x + 3}}} = \lim_{x \to -3} \sqrt{x + 3} = \sqrt{-3 + 3} = \sqrt{0} = 0$$

3. Coba Anda kerjakan dengan cara substitusi langsung. Apakah diperoleh bentuk $\frac{0}{0}$. Agar tidak muncul bentuk $\frac{0}{0}$, faktorkanlah $(3x^3 + 3x)$ dan $(2x^2 - 8x)$ sebagai berikut.

   $$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 + 3x}{2x^2 - 8x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x\left(x^2 + 1\right)}{2x(x - 4)} = \frac{3}{2} \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 1}{x - 4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{0^2 + 1}{0 - 4} = -\frac{3}{8}$$

c. Menentukan Limit dengan Mengalikan Faktor Sekawan

Jika pada $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ diperoleh bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ untuk $x = a$ dan sulit untuk memfaktorkan $f(x)$ dan $g(x)$, lakukan perkalian dengan faktor sekawan dari $g(x)$ atau $f(x)$. Agar lebih jelas, pelajari contoh berikut.

Contoh 7.6

Tentukan limit berikut.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3-\sqrt{9-9x}}{3x}$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{3x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}$

Jawab:

1. Jika dengan cara substitusi langsung, diperoleh

$$\lim_{x \to 0} \frac{3-\sqrt{9-9x}}{3x} = \frac{3-\sqrt{9-0}}{3 \cdot 0} = \frac{0}{0} \text{ (bentuk tak tentu).}$$

Agar tidak muncul bentuk tak tentu, kalikanlah $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3-\sqrt{9-9x}}{3x}$ dengan $\frac{3+\sqrt{9-9x}}{3+\sqrt{9-9x}}$, sebagai berikut.

$$\lim_{x \to 0} \frac{3-\sqrt{9-9x}}{3x} \cdot \frac{3+\sqrt{9-9x}}{3+\sqrt{9-9x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{9-(9-9x)}{3x\left(3+\sqrt{9-9x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{9\cancel{x}}{3\cancel{x}\left(3+\sqrt{9-9x}\right)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3}{3+\sqrt{9-9x}} = \frac{3}{3+\sqrt{9-0}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2. Coba Anda kerjakan dengan cara substitusi langsung. Apakah diperoleh bentuk $\frac{0}{0}$? Agar tidak muncul bentuk $\frac{0}{0}$, kalikanlah $\sqrt{3x-1}-\sqrt{x+1}$ dengan faktor sekawannya, sebagai berikut.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{3x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{3x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{3x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x-2}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{x+1}} = \lim_{x \to 1} \frac{2\,\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} \cdot \frac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{x+1}}$$

$$= 2 \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{x+1}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2-1}+\sqrt{1}}{\sqrt{3-1}+\sqrt{1+1}} = 2 \cdot \frac{2}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Situs Matematika

Anda dapat mengetahui informasi lain tentang limit fungsi melalui internet dengan mengunjungi situs berikut.

- http://mathworld.wolfram.com
- http:// mathstuff.com
- http:// youngcow.net

Soal Terbuka

1. Buatlah 4 soal limit x menuju 1 yang nilainya 2. Berikan soal ini kepada teman Anda untuk dicek dan dikritisi.
2. Buatlah uraian singkat strategi yang Anda lakukan untuk menyelesaikan soal limit. Kemudian, bacakan (beberapa siswa) hasilnya di depan kelas.

3. Limit Tak Hingga dan Limit Fungsi di Tak Hingga

Lambang ∞ (dibaca: tak hingga) digunakan untuk menyatakan nilai bilangan yang semakin besar. Jadi, ∞ bukan merupakan lambang bilangan dan tidak dapat dioperasikan secara aljabar sehingga *tidak benar* $\infty - \infty = 0$ atau $\frac{\infty}{\infty} = 1$.

Amati fungsi berikut.

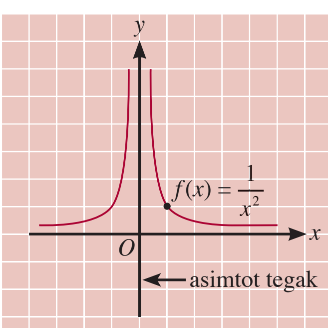
$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Fungsi f tidak terdefinisi di $x = 0$ sebab pembagian bilangan satu hanya terdefinisi jika pembagi $\neq 0$. Anda dapat menentukan $f(x) = \frac{1}{x^2}$ pada beberapa nilai x yang mendekati 0 seperti diperlihatkan pada Tabel 7.3.

Tabel 7.3

x	$\frac{1}{x^2}$
–0,01	10.000
–0,001	1.000.000
–0,0001	100.000.000
–0,00001	10.000.000.000
0	?
0,00001	10.000.000.000
0,0001	100.000.000
0,001	1.000.000
0,01	10.000

Amati tabel tersebut. Jika x menuju 0 maka nilai $\frac{1}{x^2}$ bernilai positif yang semakin membesar tanpa batas. Dalam lambang matematika ditulis $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$. Bentuk grafik fungsi seperti ini diperlihatkan pada Gambar 7.2.



Gambar 7.2
Grafik $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Tabel 7.4 memperlihatkan nilai $\frac{1}{x^2}$ untuk nilai x yang menjadi sangat besar.

Tabel 7.4

x	1	10	1.000	10.000	100.000	?
$\frac{1}{x^2}$	1	0,01	0,000001	0,00000001	0,0000000001	0

Amatilah tabel tersebut, ternyata nilai $\frac{1}{x^2}$ menuju 0 jika x menjadi sangat besar. Dalam lambang matematika, ditulis

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Lain halnya dengan fungsi $f(x) = x^2$. Ketika x menjadi sangat besar maka nilai x^2 pun bernilai semakin besar tanpa batas. Dalam lambang matematika, ditulis

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty \text{ (Amati kembali Gambar 7.2)}$$

Untuk fungsi $g(x) = \sqrt{x^2+1}$, ketika x menjadi sangat besar maka nilai $\sqrt{x^2+1}$ pun bernilai semakin besar tanpa batas. Dalam lambang matematika, ditulis $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1} = \infty$.

Untuk menyelesaikan limit fungsi tak hingga Anda dapat menggunakan Teorema Limit Utama pada halaman 144.

Pelajari contoh-contoh berikut.

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x+1}{2x+10} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6+\frac{1}{x}}{2+\frac{10}{x}} = \dfrac{6+0}{2+0} = 3$

b. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x+100}{3x^2-5x+10} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{8}{x}+\frac{100}{x^2}}{3-\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}} = \dfrac{0+0}{3-0+0} = \dfrac{0}{3} = 0$

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-6x^2+100}{2x^2+3x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-6+\frac{100}{x^2}}{2+\frac{3}{x}} = \dfrac{-6+0}{2+0} = \dfrac{-6}{2} = -3$

d. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x-1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-0-0}} = \dfrac{1}{\sqrt{1}} = \dfrac{1}{1} = 1$

e. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+3} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}}$

Perhatikan, ketika x semakin membesar tanpa batas, nilai $1+\dfrac{2}{x}$ menuju **1**, sedangkan nilai $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}$ *menuju nol*. Akibatnya, nilai $\dfrac{1+\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}}$ *membesar tanpa batas*.

Dengan demikian, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}} = \infty$.

Dari uraian tersebut, dapatkah Anda menduga bentuk umum limit? Cobalah nyatakan bentuk tersebut dengan kata-kata Anda sendiri. Konsep limit yang telah Anda pelajari tersebut memperjelas ketentuan limit berikut.

Ingatlah

Dari Gambar 7.5, jika x menjadi sangat kecil ($x \to \infty$) maka nilai $\dfrac{1}{x^2}$ menuju 0. Dalam lambang matematika ditulis $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0$.

Ingatlah

Pada soal a, pembilang dan penyebut bentuk $\dfrac{6x-1}{2x+0}$ masing-masing dibagi dengan x karena jika disubstitusikan secara langsung diperoleh bentuk $\dfrac{\infty}{\infty}$. Dengan penalaran yang sama, pembilang dan penyebut fungsi pada soal b, c, d, dan e masing-masing harus dibagi dengan pangkat tertinggi dari pembilang supaya tidak diperoleh bentuk $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Pembahasan Soal

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-2)^3}{(4x+3)^3}$ sama dengan ....

Jawab:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-2)^3}{(4x+3)^3}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{27x^3-54x^3+36x-8}{64x^3+144x^2+108x+27}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{27-\frac{54}{x}+\frac{36}{x^2}-\frac{8}{x^3}}{64+\frac{144}{x}+\frac{108}{x^2}+\frac{27}{x^3}}$

$= \dfrac{27}{64}$

Soal SKALU, 1978

Informasi untuk Anda

Information for you

Lambang tak hingga yang digunakan sekarang (∞), kali pertama diperkenalkan oleh John Wallis (1616–1703) pada tahun 1655 dalam jurnalnya yang berjudul *On Conic Sections*.

The symbol we now use for infinity (∞), was first used by John Wallis (1616–1703) in 1655 in his treatise On Conic Sections.

Sumber: *www.DrMath.com*

Secara umum,

- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\text{koefisien pangkat tertinggi } f(x)}{\text{koefisien pangkat tertinggi } g(x)}$, **jika pangkat tertinggi $f(x)$ = pangkat tertinggi $g(x)$;**
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, **jika pangkat tertinggi $f(x)$ < pangkat tertinggi $g(x)$;**
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$, **jika pangkat tertinggi $f(x)$ > pangkat tertinggi $g(x)$;**

dengan $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya merupakan fungsi polinom.

Cara lain untuk memperoleh penyelesaian limit fungsi adalah *mengalikan dengan faktor sekawan*. Pelajari contoh-contoh berikut.

1. $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\times\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{0}{1+1} = 0$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)\times\frac{\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}\right)}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}} = 0$$

Tes Kompetensi Subbab A

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Jika limitnya ada, hitunglah limit fungsi berikut.

a. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-2}$

b. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

c. $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{x}(x+1)$

d. $\lim\limits_{x\to 3} \left(2x^2-1\right)\sqrt{\left(x^2+1\right)}$

e. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2-\sqrt{x+2}}{x-2}$

f. $\lim\limits_{x\to -3} (x-3)^2 \sqrt[3]{(x+3)^2}$

g. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x}$

h. $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)\sqrt{x-4}$

2. Tentukan limit fungsi berikut.

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x+1}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+2}{4x-5}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-2x-1}}$

d. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+1}{3x^2-2}$

e. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2-2x+1}}{x+100}$

f. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x-3x^2+6}{3x^3-8}$

g. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1-2x}$

h. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{9+2x}{x^2-3}$

3. Hitunglah limit fungsi $f(x)$ berikut.

a. $f(x) = \frac{x^2+2x}{x+2}$ di $x = -2$

b. $f(x) = \frac{1-x}{x^2-2x+1}$ di $x = 1$

c. $f(x) = \frac{2-x}{x^2-4x+4}$ di $x = 2$

d. $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ di $x = 1$

e. $f(x) = \frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$ di $x = 9$

f. $f(x) = \frac{x^3-9x}{x-3}$ di $x = 3$

g. $f(x) = \frac{x^3-9x}{x+3}$ di $x = -3$

h. $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x}-2}$ di $x = 4$

4. Tentukan limit fungsi berikut.

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(4x+2)^2}{\sqrt{4x^4+9}}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\sqrt{x}-x-2}{\sqrt{2x^3}+2x}$

d. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3-1}-\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)$

e. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\left(a+\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(a-\dfrac{1}{x}\right)^2\right)$

f. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}\right)$

g. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-x+5}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)$

h. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\left(x^2+a^2\right)}-x$

5. Tentukan limit fungsi berikut.

a. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^4-x^3+2x-2}$

b. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2+4x-8}{x^2+x-6}$

c. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+2x^2+x}{x^4+x^3+2x+2}$

d. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2+3x+3}{x^4+x^3+2x+2}$

e. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+3x-3}{x^2+3x-4}$

f. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-3x^2+4x-12}{x^4-3x^3+x-3}$

6. Tentukan limit fungsi berikut.

a. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x^2}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}$

B. Limit Fungsi Trigonometri

Pada Subbab A telah dipelajari limit fungsi aljabar. Kali ini akan dipelajari limit fungsi trigonometri. Awali bagian ini dengan mempelajari sifat berikut.

$$\lim_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0$$

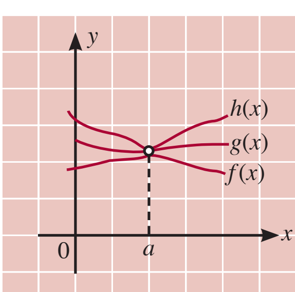
$$\lim_{x\to \pi} \cos x = \cos \pi = -1$$

$$\lim_{x\to -\pi} \cos x = \lim_{x\to -\pi} \frac{1}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x\to-\pi} 1}{\lim\limits_{x\to -\pi} \cos x} = \frac{1}{\cos(-\pi)} = -1$$

1. Menentukan Rumus Limit Fungsi Trigonometri

Sifat Prinsip Apit

Amati Gambar 7.3. Diketahui f, g, dan h adalah fungsi-fungsi yang memenuhi $f(x) \le g(x) \le h(x)$ untuk semua x dekat a, kecuali mungkin di a. Jika $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ maka $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.

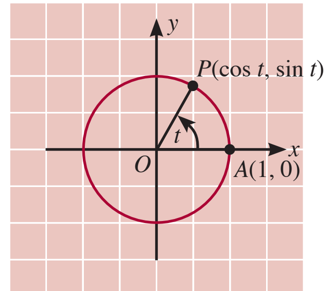


Gambar 7.3

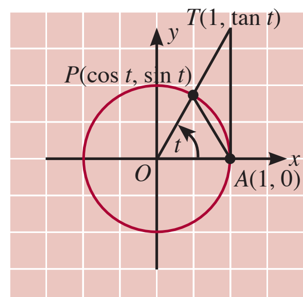
Sekarang amati Gambar 7.3(a). Diketahui, $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Ketika $t \to 0$ maka titik P bergerak ke arah $A(1, 0)$ sehingga

$\lim\limits_{t\to 0} \cos t = 1$ dan $\lim\limits_{t\to 0} \sin t = 0$.

Perpanjangan $\overline{OP}$ dan garis tegak lurus sumbu-x yang melalui A akan berpotongan di titik $T(1, \tan t)$ seperti diperlihatkan pada Gambar 7.3 (b).



(a)



(b)

Gambar 7.3

Sekarang amati ΔOAP, tembereng OAP, dan ΔOAT pada Gambar 7.3(b). Dari hasil pengamatan tentunya Anda memahami bahwa

luas $\Delta OAP \leq$ luas juring $OAP \leq$ luas ΔOAT ....(1)

Anda ketahui:

luas $\Delta OAP = \frac{1}{2}$ alas $\times$ tinggi $= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin t = \frac{1}{2} \sin t$,

luas juring OAP $= \frac{1}{2}$ jari-jari $\times$ sudut dalam radian

$= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot t = \frac{1}{2} t$, dan

luas ΔOAT $= \frac{1}{2}$ alas $\times$ tinggi

$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan t = \frac{\sin t}{2 \cos t}$.

Dengan demikian, ketidaksamaan (1) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{1}{2}\sin t \leq \frac{1}{2} t \leq \frac{\sin t}{2\cos t} \quad \text{....(2)}$$

Kalikan ketidaksamaan (2) dengan bilangan positif $\frac{2}{\sin t}$, diperoleh

$$1 \leq \frac{t}{\sin t} \leq \frac{1}{\cos t} \Leftrightarrow \cos t \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1$$

Sampai uraian ini anggaplah $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Akan tetapi, jika $-\frac{\pi}{2} < t < 0$ maka $0 < -t < \frac{\pi}{2}$ sehingga $\cos(-t) \leq \frac{\sin(-t)}{-t} \leq 1$

$$\cos t \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1 \quad \text{....(3)}$$

Dalam ketidaksamaan (3), misalkan $t \to 0, f(t) = \cos t$, $g(t) = \frac{\sin t}{t}$, dan $h(t) = 1$.

Anda tentu memahami bahwa $\lim_{t\to 0} f(t) \le \lim_{t\to 0} g(t) \le \lim_{t\to 0} h(t)$. Untuk t = 0 maka $f(t)$ cos t = cos 0 = 1 dan karena $h(t)$ = 1 maka $1 \le \frac{\sin t}{t} \le 1$. Dalam hal ini tidak ada kemungkinan lain kecuali $\frac{\sin t}{t} = 1$. Dengan demikian, $\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

Dapatkah Anda membuktikan bahwa

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = 1,\ \lim_{t\to 0} \frac{t}{\tan t} = 1, \text{ dan } \lim_{t\to 0} \frac{\tan t}{t} = 1?$$

Silakan buktikan sendiri.

2. Menentukan Limit Fungsi Trigonometri

Setelah Anda memahami rumus limit fungsi trigonometri, pelajari cara menentukan limit fungsi trigonometri tersebut.

Dalam beberapa hal, cara menghitung limit fungsi trigonometri sama dengan cara menghitung limit fungsi aljabar. Oleh karena itu, teorema limit utama pada Subbab A.2 berlaku juga untuk limit fungsi trigonometri.

Contoh 7.7

Hitunglah limit fungsi trigonometri berikut.

1. $\lim_{t\to 0} \frac{2x}{\sin 2x}$ **2.** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x \sin x}$

Jawab:

1. $\lim_{t\to 0} \frac{2x}{\sin 2x} = 1$ (sesuai rumus)

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}x}{x\left(2\sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{1}{2}x}{x\cos \frac{1}{2}x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos \frac{1}{2}x} = 1 \cdot \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

Contoh 7.8

Hitunglah limit fungsi trigonometri berikut.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{5x - \sin x}{x}$ **2.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$ **3.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x}$

Jawab:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x-\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5x}{x}-\dfrac{\sin x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}5-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 5-1=4$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot\sin x}{x\cdot x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1\cdot 1 = 1$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 2x}\cdot\dfrac{2x}{3x}\cdot\dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\tan 2x}$

$= \dfrac{3}{2}\cdot 1\cdot 1 = \dfrac{3}{2}$

Contoh 7.9

Tentukanlah $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ bagi fungsi-fungsi berikut ini.

1. $f(x) = \cos x$ **2.** $f(x) = \sin x$

Jawab:

1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos x(\cos h-1)}{h}-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin x\sin h}{h}$

$= \cos x\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos h-1}{h}-\sin x\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}$

$= \cos x.0-\sin x.1 = -\sin x.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin x(\cos h-1)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos x\sin h}{h}$

$= \sin x\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos h-1}{h}+\cos x\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}$

$= \sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1 = \cos x.$

Contoh 7.10

Hitunglah limit fungsi trigonometri berikut.

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\tan x}$ **b.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin\frac{1}{2}x}$

Jawab:

a. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\left(\frac{x}{\tan x}\right)=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}\right)$$
$$= (1)(1) = 1$$

atau $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$$

b. $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin\frac{1}{2}x}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)(6)$$
$$= (1)\ (1)\ (6) = 6$$

Pembahasan Soal

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4}=....$$

Jawab:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}\cdot\frac{\sin(x-2)}{x-2}$$
$$=\frac{1}{2+2}\cdot 1$$
$$=\frac{1}{4}$$

Soal UMPTN 1998

Contoh 7.11

Hitunglah:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\tan 3x\sec 2x$ **b.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{cosec}^2 x-\operatorname{cosec} x\cot x\right)$

Jawab:

a. $$\lim_{x\to 0}\tan 3x\sec 2x = \lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\cos 2x}\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\left[\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x}\right]\left[\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\cos 2x}\right]$$
$$=\frac{2}{3}\ (1)\ (1) = \frac{2}{3}$$

b. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{cosec}^2 x-\operatorname{cosec} x\cot x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos^2 x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\right)$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}1}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)}=\frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{1+0}=1$$

Hal Penting

- limit fungsi
- faktor sekawan
- limit fungsi trigonometri
- prinsip apit
- limit tak hingga

Tes Kompetensi Subbab B

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Hitunglah limit fungsi trigonometri berikut.

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{\sin 5x}$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$

c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\sin 5x}$

d. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{-3x}$

e. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\tan 5x}$

f. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan \frac{1}{3}x}{4}$

2. Hitunglah limit fungsi trigonometri berikut.

a. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \tan x}{\cot 2x}$

b. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{2(\sin x - \cos x)}{1 - \sin 2x}$

c. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{2}\cos x - 1}$

d. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{2\cos 2x}{\cos x - \sin x}$

3. Hitunglah $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ untuk fungsi berikut.

a. $f(x) = \sin 3x$

b. $f(x) = \sin (3x + \pi)$

c. $f(x) = \sin 3x + \pi$

d. $f(x) = \cos (x - \pi)$

e. $f(x) = \cos x - \pi$

4. Hitunglah $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ untuk fungsi berikut.

a. $f(x) = 2 \sin 3x$

b. $f(x) = -2 \sin (3x + \pi)$

c. $f(x) = -\sin 3x + \pi)$

Rangkuman

- Jika nilai fungsi $f(x)$ untuk mendekati satu bilangan real L, x mendekati a maka L merupakan nilai limit fungsi $f(x)$ di $x = a$, ditulis $f(x) = L$ atau jika xa maka $f(a)L$.
- Agar sumbu limit fungsi $f(x)$ di $x = a$ ada, nilai limit fungsi tersebut harus ada dan nilainya sama, ditulis
  $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} - f(x) = \lim\limits_{x \to a} + f(x) = L$

Refleksi

Setelah Anda mempelajari Bab 7,

1. coba Anda tuliskan bagian-bagian dari bab ini yang telah dipahami,
2. tuliskan pula hal-hal yang masih sulit untuk dipahami di buku latihan Anda.

Tes Kompetensi Bab 7

A. Pilihlah salah satu jawaban dan berikan alasannya.

1. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+2x}{x-2} = ...$
   a. 0
   b. $\dfrac{1}{2}$
   c. 2
   d. 4
   e. ∞

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{10}-1}{x-1}$ adalah ....
   a. 1
   b. ∞
   c. 0
   d. –1
   e. tidak ada

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x(2a+2b)+4ab-x}\right)$ adalah ....
   a. 0
   b. ∞
   c. $a-b$
   d. $a+b$
   e. $\dfrac{a+b}{2}$

4. Jika $f(x) = 2x - x^2$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ adalah ....
   a. 1
   b. –2
   c. 2
   d. 3
   e. –4

5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = ...$
   a. 3
   b. 6
   c. 9
   d. 12
   e. ∞

6. $\lim\limits_{x\to\infty}(4x-3)-\sqrt{16x^2-3x+7}$ adalah ....
   a. $\dfrac{12}{11}$
   b. $-\dfrac{11}{12}$
   c. 0
   d. 11
   e. $-\dfrac{22}{8}$

7. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{(x-5)}{6-\sqrt{x^2+11}}$ adalah ....
   a. $\dfrac{12}{11}$
   b. $-\dfrac{11}{12}$
   c. 0
   d. 11
   e. $-\dfrac{22}{8}$

8. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{(x-5)}{6-\sqrt{x^2+11}}$ adalah ....
   a. 0
   b. $\dfrac{1}{4}$
   c. 1
   d. 4
   e. ∞

9. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ adalah ....
   a. 0
   b. 3
   c. 6
   d. 12
   e. ∞

10. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-8x+15}{3-x} = ...$
    a. 6
    b. 4
    c. 5
    d. 3
    e. 2

11. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{5x^2-1}{2x^2-x+5} = ...$
    a. $\dfrac{2}{5}$
    b. $\dfrac{3}{5}$
    c. 1
    d. $\dfrac{5}{2}$
    e. $\dfrac{7}{2}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x-5}{\sqrt{x^2+2x+4}} = ...$
    a. 3
    b. 4
    c. 6
    d. 7
    e. 8

13. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3} = ...$

a. $-\dfrac{3}{2}$
b. $-\dfrac{2}{3}$
c. $-\dfrac{1}{2}$
d. $\dfrac{1}{2}$
e. $\dfrac{3}{2}$

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\tan 4x} = ...$

a. $-\dfrac{3}{4}$
b. $-\dfrac{4}{3}$
c. $\dfrac{1}{4}$
d. $\dfrac{3}{4}$
e. $\dfrac{4}{3}$

15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2} = ...$

a. –2
b. –1
c. 0
d. 1
e. 2

16. Jika $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -3$ dan $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 4$

maka $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3f(x) - 2x - 1}{2g(x)} = ...$

a. 1
b. $\dfrac{3}{4}$
c. $-\dfrac{1}{2}$
d. $-\dfrac{3}{4}$
e. $-\dfrac{5}{6}$

17. Diketahui $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{jika } x < 3 \\ 3x & \text{jika } x \geq 3 \end{cases}$

maka $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = ...$

a. –2
b. –1
c. 1
d. 2
e. 3

18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 8x}{x} = ...$

a. 8
b. 4
c. 2
d. –2
e. –4

19. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x^2} = ...$

a. –2
b. –1
c. 0
d. $\dfrac{1}{2}$
e. 2

20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = ...$

a. –2
b. –1
c. 0
d. 1
e. 2

B. Kerjakanlah soal-soal berikut pada buku latihan Anda.

1. Jika limitnya ada, hitunglah limit fungsi berikut.

   a. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x - 2}$

   b. $\lim\limits_{x\to 2} \left(x^2 - 4x + 4\right)$

   c. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 2x - 3}$

2. Tentukan nilai limit berikut.

   a. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ dengan

   $$f(x) = \begin{cases} -x \text{ jika } x < 0 \\ 3x \text{ jika } x \geq 0 \end{cases}$$

   b. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ dengan

   $$f(x) : \begin{cases} x + 1 \text{ jika } x < 1 \\ x \text{ jika } x \geq 1 \end{cases}$$

   c. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ dengan

   $$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ jika } x \leq 2 \\ -x + 5 \text{ jika } x > 2 \end{cases}$$

3. Sebuah benda ditembakkan vertikal ke atas. Jika persamaan gerak dari benda itu dinyatakan $S = f(t) = -5t^2 + 40t$ maka kecepatan sesaat dari benda itu dalam waktu tepat t_1 detik dinyatakan oleh

   $$V(t_1) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$$

   Hitunglah

   a. kecepatan sesaat dari benda itu dalam waktu tepat 2 detik, dan

   b. kecepatan sesaat dari benda itu dalam waktu.

4. Hitunglah limit fungsi trigonometri berikut.

   a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x}$

   b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x^2}$

   c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x^2}$

5. Hitunglah limit fungsi trigonometri berikut.

   a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{-2x}$

   b. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$

   c. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}}$

Bab 8

Sumber: www.duniacyber.com

Turunan Fungsi dan Aplikasinya

Setelah mempelajari bab ini, Anda harus mampu menggunakan konsep, sifat, dan aturan dalam perhitungan turunan fungsi; menggunakan turunan untuk menentukan karakteristik suatu fungsi dan memecahkan masalah; merancang model matematika yang berkaitan dengan ekstrim fungsi, menyelesaikan modelnya, dan menafsirkan hasil yang diperoleh.

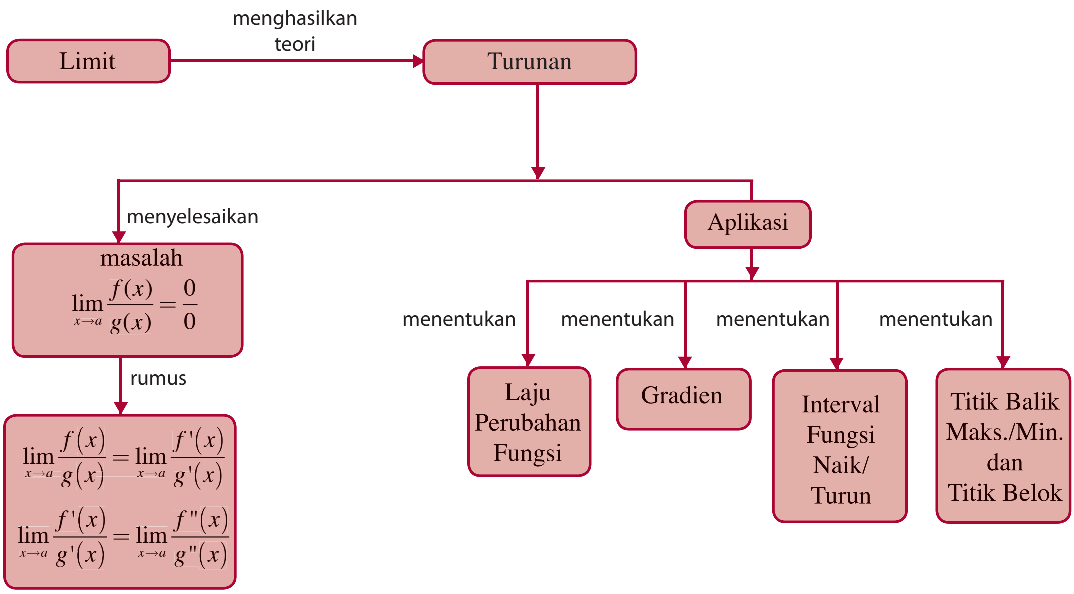
Pembahasan limit fungsi yang telah Anda pelajari di Bab 7 dapat dikembangkan pada pembahasan turunan fungsi karena dengan mengetahui turunan fungsi, Anda dapat mempelajari sifat-sifat fungsi. Sifat-sifat fungsi tersebut misalnya, kemonotonan fungsi, ekstrim fungsi, kecukupan fungsi, dan titik balik fungsi. Di samping itu, Anda juga dapat mengaitkan turunan fungsi dengan kecepatan sesaat serta dapat menggunakan turunan fungsi untuk mempelajari aplikasi permasalahan sederhana, seperti permasalahan berikut.

Banyak minyak pelumas (selama satu tahun) yang digunakan oleh suatu kendaraan yang bergerak dengan kecepatan v km/jam memenuhi persamaan $Q(v) = -\frac{1}{45}x^2 + 2x - 20$ liter. Dengan memahami konsep turunan, Anda dapat menentukan jumlah maksimum minyak pelumas yang digunakan dalam 4 tahun.

A. **Konsep Turunan**
B. **Menentukan Turunan Fungsi**
C. **Persamaan Garis Singgung pada Kurva**
D. **Fungsi Naik dan Fungsi Turun**
E. **Maksimum dan Minimum Fungsi**
F. **Turunan Kedua**
G. **Nilai Stasioner**
H. **Menggambar Grafik Fungsi Aljabar**

Diagram Alur

Untuk mempermudah Anda dalam mempelajari bab ini, pelajarilah diagram alur yang disajikan sebagai berikut.



Tes Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

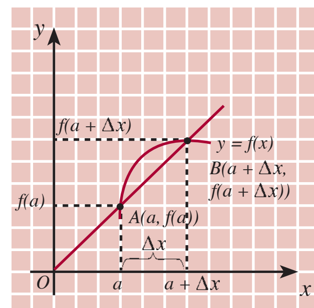
1. Sebuah garis melalui titik (1, 5) dan (7, 3). Tentukan gradien garis tersebut. Jelaskan pula cara mencarinya.
2. $\sin(\alpha \pm \beta) = ...$
3. $\cos(\alpha + \beta) = ...$
4. $\tan(\alpha + \beta) = ...$
5. $\cos 2\alpha = ...$
6. $f(x) = 2x^3 + 3x$, tentukan $f(x + 1)$ dan $f(a + b)$.
7. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = ...$
8. Tentukan gradien garis singgung kurva $y = \frac{1}{x}$ di titik $\left(2, \frac{1}{2}\right)$

A. Konsep Turunan

Untuk memahami konsep dasar turunan, tinjaulah dua masalah yang kelihatannya berbeda. Masalah pertama adalah masalah garis singgung, sedangkan masalah kedua adalah masalah kecepatan sesaat. Satu dari kedua masalah itu menyangkut geometri dan lainnya yang menyangkut mekanika terlihat seperti tidak ada hubungan. Sebenarnya, kedua masalah itu merupakan kembaran yang identik. Agar lebih jelasnya, pelajari uraian berikut.

1. Garis Singgung

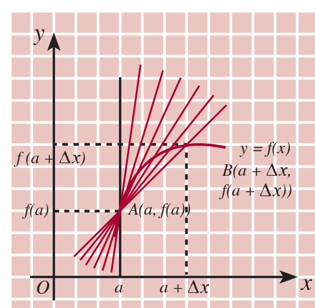
Amati Gambar 8.1. Misalkan A adalah suatu titik tetap pada grafik $y = f(x)$ dan B adalah sebuah titik berdekatan yang dapat dipindah-pindahkan sepanjang grafik $y = f(x)$. Misalkan, titik A berkoordinat $(a, f(a))$ maka titik B berkoordinat $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$. Garis yang melalui A dan B mempunyai gradien (kemiringan) $\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$. Garis ini memotong grafik di dua titik A dan B yang berbeda.



Gambar 8.1

Jika titik B bergerak sepanjang kurva $y = f(x)$ mendekati titik A maka nilai Δx semakin kecil. Jika nilai Δx mendekati nol maka titik B akan berimpit dengan titik A. Akibatnya, garis singgung (jika tidak tegak lurus pada sumbu-x) adalah garis yang melalui $A(a, f(a))$ dengan gradien

$$\boxed{\boldsymbol{m_{AB} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}}} \qquad \ldots(1)$$



Gambar 8.2

Pertanyaan: Mengapa persamaan garis singgung tidak boleh tegak lurus sumbu-x?

Contoh 8.1

Tentukan gradien garis singgung pada kurva

a. $f(x) = x^2$ di titik dengan absis 2

b. $f(x) = x^3$ di titik dengan absis 3

Jawab:

a. $$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 4 - \Delta x = 4$$

Jadi, gradien garis singgung kurva $f(x) = x^2$ di titik dengan absis $x = 2$ adalah $m = 4$.

b. $m = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(3+\Delta x)^3 - 3^3}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3^3 + 3 \cdot 3^2 \Delta x + \Delta x^3 - 3^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{27\Delta x + 9(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(27 + 9\Delta x + (\Delta x)^2\right)\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 27 + 9\Delta x + \Delta x^2 = 27$$

Jadi, gradien garis singgung kurva $f(x) = x^3$ di titik dengan absis $x = 3$ adalah $m = 27$.

2. Kecepatan Sesaat

Misalkan, fungsi $f(x) = 15x^2 + 20x$ menyatakan jarak (dalam km) yang ditempuh sebuah mobil setelah x jam perjalanan selama selang waktu $0 \leq x \leq 2$. Kecepatan rata-rata mobil itu selama perjalanannya adalah

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{\left[15 \cdot (2^2) + 20 \cdot 2\right] - \left[15 \cdot (0)^2 + 20 \cdot 0\right]}{2}$$

$$= 50 \text{ km/jam}$$

Sekarang, coba amati kecepatan rata-rata mobil dalam selang $c \leq x \leq d$. Untuk keperluan ini, buatlah Tabel 8.1.

Tabel 8.1

Selang Waktu	$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$
0 – 1	35
0,8 – 1	47
0,9 – 1	48,5
0,99 – 1	49,85
0,999 – 1	49,9850
0,9999 – 1	49,9985
1 – 1,0001	50,0015
1 – 1,001	50,015
1 – 1,01	50,15
1 – 1,5	57,5
1 – 2	65

Amati tabel tersebut. Nilai $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ mendekat ke bilangan 50 jika lebar selang waktunya dibuat semakin mengecil (Δx mendekati nol). Nilai 50 tersebut disebut *kecepatan* (*sesaat*) *pada* $x = 1$.

Sekarang, dapat dipahami bahwa kecepatan sesaat diperoleh melalui proses limit terhadap kecepatan rata-rata dengan cara membuat nilai-nilai x mendekat ke-1 atau Δx dekat ke nol. Dalam lambang matematika kecepatan sesaat pada $x = 1$ ditulis

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \frac{15(1+\Delta x)^2 + 20(1+\Delta x) - \left(15 \cdot 1^2 + 20 \cdot 1\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{50\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 50$$

Jadi, kecepatan mobil pada saat $x = 1$ adalah 50 km/jam.

Dari uraian tersebut, dapatkah Anda menyatakan kecepatan sesaat v di $x = a$? Cobalah nyatakan dengan kata-kata Anda sendiri.

Uraian tersebut menggambarkan definisi kecepatan sesaat v di $x = a$, yaitu

$$\boldsymbol{v = \lim_{\Delta x \to 0} v_{\text{rata-rata}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}} \quad \text{...(2)}$$

Sumber: *Dokumentasi Penerbit*

Gambar 8.3
Jarak yang ditempuh mobil ini mengikuti fungsi $f(x) = 15x^2 + 20x$. Berapakah kecepatan rata-ratanya?

Sekarang, tentunya Anda dapat melihat mengapa Anda menyebut kemiringan dari garis singgung dan kecepatan sesaat adalah kembaran identik. Amatilah kedua rumus tersebut, yaitu rumus (1) dan (2). Kedua rumus tersebut menggunakan nama berlainan untuk konsep yang sama, tetapi dalam situasi yang berlainan.

Contoh 8.2

Sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus sehingga kedudukannya setelah x detik memenuhi persamaan $f(x) = 6x^3 + x^2$, dengan $f(x)$ dinyatakan dalam meter.

a. Tentukan kecepatan rata-rata benda dalam selang waktu $2 \le x \le 3$.

b. Berapa kecepatan sesaat benda pada $x = 2$ detik?

Jawab:

a. $$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\left(6 \cdot 3^3 + 3^2\right) - \left(6 \cdot 2^3 + 2^3\right)}{3-2} = 119$$

Jadi, kecepatan rata-ratanya adalah 119 m/s.

b. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(6(2+\Delta x)^3 + \left(2+\Delta x^2\right)\right) - \left(6 \cdot 2^3 + 2^2\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\left(8 + 12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3\right) + \left(4 + 4\Delta x + \Delta x^2\right) - 52}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 6\Delta x^2 + 37\Delta x + 76 = 76$$

Jadi, kecepatan pada saat $x = 2$ atau pada detik kedua adalah 76 meter/detik.

3. Turunan Fungsi di $x = a$

Jika fungsi $y = f(x)$ terdefinisi di sekitar $x = a$ maka

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Jika $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ada maka nilainya disebut *turunan fungsi* $f(x)$ di $x = a$. Turunan fungsi f ialah suatu fungsi juga, yaitu fungsi turunan yang dilambangkan dengan $f'(x)$. Untuk menyatakan turunan di $x = a$ dinyatakan dengan $f'(a)$. Jadi,

$$\boldsymbol{f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}} \text{ atau } \boldsymbol{f'(a) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Contoh 8.3

Gunakan konsep limit untuk menyelesaikan soal berikut ini. Jika $f(x) = x^2 - x$, tentukan $f'(5)$.

Jawab:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$f'(5) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(5+\Delta x) - f(5)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left((5+\Delta x)^2 - (5-\Delta x)\right) - \left(5^2 - 5\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10\Delta x - \Delta x^2 - \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 10 + \Delta x - 1 = 9$$

Tantangan untuk Anda

Coba Anda tunjukkan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = 0.$$

Contoh 8.4

Tentukanlah $f'(x)$ fungsi-fungsi berikut ini.

a. $f(x) = x^2 + x$ **b.** $f(x) = \cos x$

Jawab:

a. $f(x) = x^2 + x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left((x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x)\right) - \left(x^2 + x\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x + 1 = 2x + 1$$

b. $f(x) = \cos x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \cos x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} \right) - \sin \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right)$$

$$= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x$$

Contoh 8.5

Panjang sebuah persegipanjang sama dengan tiga kali lebarnya. Tentukan laju perubahan luas terhadap lebar untuk lebar = 5 cm.

Jawab:

Misalkan, lebar = l cm maka panjang = $p = 3 \times l = 3l$ dan luas = $L = p \times l = 3l.l = 3l^2$.

Jadi, $L = f(l) = 3l^2$.

Laju perubahan luas terhadap lebar l untuk $l = 5$ adalah L '(5).

$$L'(5) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{L(5+h) - L(5)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(5+h)^2 - 3,5^2}{h}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(25 + 10h + h^2) - 75}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{30h + 3h^2}{h}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (30 + 3h) = 30$$

4. Mengenal Notasi Leibnitz

Anda telah mempelajari bahwa turunan fungsi $f(x)$ dinotasikan dengan $f'(x)$. Nilai Δx menyatakan perubahan nilai x, yaitu $\Delta x = x_2 - x_1$. Adapun perubahan $f(x + \Delta x) - f(x)$ menyatakan perubahan nilai fungsi $f(x)$ dinotasikan dengan Δf. Selanjutnya, bentuk limit tersebut dapat dituliskan menjadi $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Selain itu, terdapat notasi lain untuk menyatakan turunan fungsi, yaitu $\frac{df}{dx}$. Diketahui fungsi

$$\boxed{y = f(x)} \qquad ....(1)$$

Tokoh Matematika

Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646–1716)

Gottfried Wilhelm Leibnitz adalah orang jenius. Ia ahli dalam bidang hukum, agama, politik, sejarah, filsafat, dan matematika. Bersama Newton merumuskan pengertian dasar tentang kalkulus diferensial. Leibnitz pun dikenal karena menemukan suatu jenis mesin hitung.

Sumber: *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1*, 1990 sehingga turunan fungsi (1) dapat dituliskan menjadi

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)}$$

Notasi tersebut diperkenalkan oleh seorang ahli matematika Jerman, yaitu Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646–1716) sehingga dinamakan *notasi Leibnitz*, tepatnya notasi *Double d Leibnitz*.

Contoh 8.6

Misalkan $f(x) = x^3$, tentukanlah

a. $\frac{df}{dx}$ **b.** nilai x sehingga $\frac{df}{dx} = 12$

Jawab:

a. $$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 = 3x^2$$

b. $\frac{df}{dx} = 3x^2$ maka $3x^2 = 12 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Jadi, nilai x yang memenuhi $\frac{df}{dx} = 12$ adalah $x = \pm 2$.

Contoh 8.7

Sebuah benda bergerak sehingga jarak yang ditempuh memenuhi persamaan $s = f(t) = t^2 - 3t$. Tentukanlah laju perubahan sesaat jarak terhadap waktu t. Tentukanlah nilai t sedemikian sehingga laju perubahan jarak terhadap waktu adalah 15.

Jawab:

Laju perubahan sesaat jarak terhadap waktu adalah

$$\frac{ds}{dt} = \frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(1)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[(t+\Delta t)^2 - 3(t+\Delta t)\right] - (t^2 - 3t)}{}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - 3t - 3\Delta t - t^2 + 3t}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t + \Delta t + \Delta t^2 - 3\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 2t + \Delta t - 3 = 2t - 3$$

Apabila laju perubahan jarak terhadap waktu sama dengan 16, diperoleh

$\frac{df}{dx} = 2t - 3 \Leftrightarrow 15 = 2t - 3$

$\Leftrightarrow 2t = 18 \Leftrightarrow t = 9$

Jadi, laju perubahan sama dengan 15 terjadi pada saat $t = 9$ sekon.

Tes Kompetensi Subbab A

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Gunakan konsep limit untuk menyelesaikan soal-soal berikut.
 a. Jika $f(x) = x^2 + 3x$, tentukan $f'(x)$.
 b. Jika $f(x) = x^2 - 2x + 6$, tentukan $f'(x)$.
 c. Jika $f(x) = \sqrt{2x}$, tentukan $f'(x)$.
 d. Jika $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, tentukan $f'(x)$.

2. Gunakan konsep limit untuk menyelesaikan soal-soal berikut.
 a. Jika $f(x) = 4 - x^2$, tentukan $f'(-3)$.
 b. Jika $f(x) = 6x - 2x^3$, tentukan $f'(2)$.
 c. Jika $f(x) = \frac{x}{x-1}$, tentukan $f'(5)$.
 d. Jika $f(x) = x^2 + \frac{x}{x+1}$, tentukan $f'(1)$.

3. Dengan menggunakan konsep limit, tentukan gradien garis singgung pada kurva berikut ini.
 a. $f(x) = 5x^2$ di titik dengan absis $x = 2$
 b. $f(x) = x^2 + x - 5$ di titik dengan absis $x = -1$
 c. $f(x) = \frac{x}{x^2}$ di titik dengan absis $x = -2$
 d. $f(x) = \sqrt{x} + x$ di titik dengan absis $x = 4$

4. Dengan menggunakan konsep limit, hitung nilai $\frac{df}{dx}$ dari fungsi berikut untuk x yang diberikan.
 a. $f(x) = 2x^2$ di $x = -1$
 b. $f(x) = x^2 - 5$ di $x = -4$
 c. $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ di x
 d. $f(x) = 3\cos x$ di $x = \frac{\pi}{2}$

Gunakan konsep limit untuk soal-soal berikut.

5. Sebuah benda bergerak, kedudukannya setelah t sekon memenuhi persamaan $S(t) = 3t^2 + 4t$.
 a. Berapa kecepatan rata-rata pada selang waktu $t = 3$ sekon dan $t = 5$ sekon?
 b. Berapa kecepatan sesaat pada waktu $t = 2$ sekon?

6. Sebuah perusahaan mendapatkan keuntungan setelah t tahun sebesar $2.500.000t^2 – 5.000t$.
 a. Berapa besar keuntungan antara $t = 3$ tahun dan $t = 4$ tahun?
 b. Berapa laju keuntungan sesaat pada $t = 2$ tahun?

7. Gunakan rumus turunan untuk mencari turunan fungsi-fungsi berikut.
 a. $f(x) = 6x + 4$
 b. $f(x) = ax + b$
 c. $f(x) = 3x^2 + 2$
 d. $f(x) = \sin x$
 e. $f(x) = \cos x$
 f. $f(x) = \tan x$

B. Menentukan Turunan Fungsi

Proses mendapatkan turunan suatu fungsi secara langsung yang menggunakan definisi turunan, yaitu dengan menyusun hasil bagi selisih $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ dan menghitung limitnya, memakan waktu dan membosankan. Tentunya, Anda perlu mengembangkan cara atau proses yang akan memungkinkan Anda untuk memperpendek proses yang berkepanjangan itu. Untuk itu, pelajari uraian berikut ini.

1. Menentukan Turunan Fungsi *f*(*x*) = *ax*ⁿ

Misalkan, fungsi $f(x) = ax^n$ dengan $n = 1$, 2, dan 3. Untuk $n = 1$, diperoleh $f(x) = ax$ dan turunan fungsi tersebut adalah

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x)-ax}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax+a\Delta x-ax}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} \\ &= a \end{aligned} \quad ....(1)$$

Untuk $n = 2$, diperoleh $f(x) = ax^2$ dan turunan fungsi tersebut adalah

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x)^2-ax^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax^2+2ax\Delta x+a\Delta x^2-ax^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 2ax+a\Delta x \\ &= 2ax \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, coba Anda cari turunan fungsi $f(x) = ax^3$, $f(x) = ax^4$ dan $f(x) = ax^5$.

Anda dapat menurunkan hal seperti ini untuk fungsi-fungsi berikut.

$f(x) = ax^6, f'(x) = 6ax^5$

$\vdots$

$f(x) = ax^{15}, f'(x) = 15ax^{14}$

$\vdots$

$f(x) = ax^n, f'(x) = nax^{n-1}$

Dari uraian tersebut, dapatkah Anda menduga bentuk umum turunan fungsi? Cobalah nyatakan bentuk tersebut dengan kata-kata Anda sendiri. Konsep yang telah Anda pelajari tersebut memperjelas kesimpulan berikut.

Misalkan, $f(x) = ax^n$, dengan n bilangan asli maka $f'(x) = nax^{n-1}$.

Untuk $n = 0$, $f(x) = ax^n$ menjadi $f(x) = ax^0 = a$. Fungsi $f(x) = a$ dinamakan fungsi konstan sehingga untuk berapa pun nilai x, nilai fungsinya tetap, yaitu a. Turunan fungsi konstan adalah

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f\Delta x}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a-a}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

sehingga rumus tersebut berlaku untuk n bilangan bulat sebagai berikut.

Misalkan, $f(x) = ax^n$ dengan n bilangan bulat maka $f'(x) = anx^{n-1}$ untuk $f(x) = a$, $f'(x) = 0$ dengan a sebarang bilangan real.

Tantangan untuk Anda

Rumus ini juga berlaku untuk $n = -1$

$$f(x) = \frac{a}{x}$$

$$f'(x) = \frac{-a}{x^2}$$

Tunjukkanlah dengan cara limit.

Contoh 8.8

Tentukanlah turunan fungsi-fungsi berikut ini.

a. $f(x) = x^4$ **b.** $f(x) = -8x^3$

Jawab:

a. $f(x) = x^4$ maka $f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$

b. $f(x) = -8x^3$ maka $f'(x) = -8(3)x^{3-1} = -24x^2$

Contoh 8.9

Tentukan $\frac{df}{dx}$ untuk fungsi-fungsi berikut.

a. $f(x) = \frac{1}{2}x^{-4}$ **b.** $g(x) = -\frac{1}{3x^8}$

Jawab:

a. $\frac{df}{dx} = f'(x) = \frac{1}{2}(-4)x^{-4-1} = -2x^{-5}$

b. $g(x) = -\frac{1}{3x^8} = -\frac{1}{3}x^{-8}$ maka $\frac{dg}{dx} = g'(x) = -\frac{1}{3}(-8)x^{-8-1}$

$$= \frac{8}{3x^9}$$

Contoh 8.10

Diketahui tinggi badan seorang anak pada usia 11 tahun sampai 12 tahun adalah tetap, yaitu $T(t)$ = 120 cm. Tentukanlah laju pertumbuhan (laju pertumbuhan sesaat) tinggi badan anak tersebut. Jelaskan.

Jawab:

Tinggi badan anak tersebut pada usia 11 tahun sampai 12 tahun tetap. Oleh karena itu, $T(t) = 120$ adalah fungsi konstan sehingga $T'(t) = 0$. Dengan kata lain, laju pertumbuhan tinggi badan anak tersebut adalah nol atau tinggi badan anak tersebut pada usia 11 tahun sampai 12 tahun tidak mengalami perubahan.

2. Menentukan Turunan Fungsi $f(x) = ax^n$ dengan n Bilangan Rasional

Misalkan, $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, turunan fungsi $f(x)$ adalah

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

Dengan cara yang sama seperti di atas, coba Anda cari turunan fungsi $f(x) = x^{-1/3}$ dan $f(x) = x^{-2/5}$.

Dari uraian tersebut dapatkah Anda menduga bentuk umum turunan fungsi $f(x) = ax^n$? Cobalah nyatakan bentuk tersebut dengan kata-kata Anda sendiri. Konsep turunan fungsi $f(x) = ax^n$ yang telah Anda pelajari tersebut memperjelas kesimpulan berikut.

Misalkan, $f(x) = ax^n$, dengan n bilangan rasional maka turunannya adalah $f'(x) = nax^{n-1}$.

Contoh 8.11

Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut.

a. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ **b.** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3x^2}}$ **c.** $f(x) = x^3\sqrt{x^2}$

Jawab:

a. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ maka $f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

b. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3} \cdot x^{\frac{2}{3}}}$ maka $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} x^{-\frac{2}{3}}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$$

$$= -\frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-2}{3x\sqrt[3]{3x^2}}$$

c. $f(x) = x^3\sqrt{x^2} = x^{\frac{5}{3}}$ maka $f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

3. Turunan Fungsi Berbentuk $y = u \pm v$

Diketahui, fungsi $y = f(x)$ dengan $f(x) = u(x) + v(x)$, dalam hal ini $u(x)$ dan $v(x)$ fungsi yang dapat diturunkan di $x = a$ untuk a bilangan real. Dengan demikian,

$$f'(a) = f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(a+\Delta x) + v(a+\Delta x)] - [u(a) + v(a)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(a+\Delta x) - u(a) + v(a+\Delta x) - v(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(a+\Delta x) - u(a)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(a+\Delta x) - v(a)}{\Delta x}$$

$$= u'(a) + v'(a)$$

Dari uraian tersebut, dapatkah Anda menduga bentuk umum turunan fungsi $y = u \pm v$? Cobalah nyatakan bentuk tersebut dengan kata-kata Anda sendiri. Konsep turunan fungsi $y = u \pm v$ yang telah Anda pelajari tersebut memperjelas kesimpulan berikut.

Misalkan, *a* adalah bilangan real sebarang sehingga berlaku $y' = f'(a) = u'(a) + v'(a)$; untuk $y = u + v$ maka $y' = u' + v'$

Dengan cara yang sama, coba Anda tunjukkan bahwa untuk $y = u - v$ maka $y' = u' - v'$.

Contoh 8.12

Tentukan turunan fungsi berikut.

a. $f(x) = x^3 - 3x^2$ **c.** $f(x) = \sin x + \cos x$

b. $f(x) = 3x + \dfrac{1}{x}$

Jawab:

a. $f(x) = x^3 - 3x^2$ maka $f'(x) = 3x^2 - 6x$

b. $f(x) = 3x + \dfrac{1}{x} = 3x + x^{-1}$ maka $f'(x) = 3 - x^{-2} = 3 - \dfrac{1}{x^2}$

c. $f'(x) = \cos x - \sin x$

Pembahasan Soal

Diketahui
$f(x) = 3x^2 - 5x + 2$
$g(x) = x^2 + 3x - 3$
Jika $h(x) = f(x) - 2g(x)$ maka $h'(x)$ adalah....

Jawab:

$h(x) = f(x) - 2g(x)$
$= 3x^2 - 5x + 2 - 2(x^2 + 3x - 3)$
$= x^2 - 11x + 8$
$h'(x) = 2x - 11$

Soal UMPTN 1997

4. Turunan Fungsi $y = c \cdot u$

Diketahui, fungsi $y = f(x)$ dengan $f(x) = c \cdot u(x)$, dalam hal ini c konstanta dan $u(x)$ fungsi yang dapat diturunkan di $x = a$ untuk a bilangan real sehingga

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot u(a+\Delta x) - c \cdot u(a)}{\Delta x} \\ &= c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(a+\Delta x) - u(a)}{\Delta x} = cu'(a) \end{aligned}$$

Misalkan, a adalah sebarang bilangan real sehingga untuk $y = f(a) = c \cdot u(a)$ berlaku $f'(a) = c \cdot u'(a)$. Akibatnya, dari $y = cu$ berlaku $y' = c \cdot u'$.

Contoh 8.13

Tentukan turunan fungsi berikut.

a. $f(x) = 3x^2$

b. $f(x) = -\dfrac{8}{x}$

c. $f(x) = 3 \cos x$

d. $f(x) = \sqrt[3]{5\sqrt{x}}$

Jawab:

a. $f(x) = 3x^2$ maka $f'(x) = 6x$

b. $f(x) = -\dfrac{8}{x} = -8x^{-1}$ maka $f'(x) = 8x^{-2} = \dfrac{8}{x^2}$

c. $f(x) = 3 \cos x$ maka $f'(x) = -3 \sin x$

d. $f(x) = \sqrt[3]{5\sqrt{x}} = \sqrt[3]{5x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{5}x^{\frac{1}{6}}$ maka $f'(x) = \frac{1}{6}\sqrt[3]{5}x^{-\frac{5}{6}}$

$$= \frac{\sqrt[3]{5}}{6\sqrt[6]{x^5}} = \frac{1}{6}\sqrt[6]{\frac{25}{x^5}}$$

5. Turunan Fungsi $y = uv$

Diketahui, fungsi $y = f(x)$ dengan $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, dengan $u(x)$ dan $v(x)$ adalah fungsi yang dapat diturunkan di $x = a$, untuk a bilangan real. Oleh karena itu

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(a+\Delta x)\cdot v(a+\Delta x) - u(a)\cdot v(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(a+\Delta x)v(a+\Delta x) - u(a+\Delta x)v(a)}{(a+\Delta x)} + \frac{u(a+\Delta x)v(a) - u(a)v(a)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(a+\Delta x)\{v(a+\Delta x) - v(a)\}}{(a+\Delta x)} + \frac{v(a)\{u(a+\Delta x) - u(a)\}}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} u(a+\Delta x)\frac{v(a+\Delta x) - v(a)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} v(a)\frac{u(a+\Delta x) - u(a)}{\Delta x}$$

$$= u(a)\cdot v'(a) + v(a)\cdot u'(a)$$

Oleh karena itu, jika $y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$ dengan a bilangan real sebarang berlaku $f'(a) = u(a) \cdot v'(a) + v(a) \cdot u'(a)$. Untuk $y = u \cdot v$, maka $y' = uv' + vu'$.

Contoh 8.14

Tentukan turunan fungsi berikut.

a. $f(x) = (5x^2 - 1)(3x - 2)$

b. $f(x) = \cos x \sin x$

Jawab:

a. $f(x) = (5x^2 - 1)(3x - 2)$

Misalkan, $u = 5x^2 - 1$ maka $u' = 10x$ dan $v = 3x - 2$ maka $v' = 3$ sehingga

$f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x) = (5x^2 - 1) \cdot 3 + (3x - 2) \cdot 10x$

$= 30x^2 - 20x + 15x^2 - 3 = 45x^2 - 20x - 3$

b. $f(x) = \sin x \cos x$

Misalkan, $u(x) = \sin x$ maka $u'(x) = \cos x$ dan

$v(x) = \cos x$ maka $v'(x) = -\sin x$

sehingga $f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$

$= \sin x(-\sin x) + \cos x \cdot \cos x$

$= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$

$= 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$

Pembahasan Soal

Turunan dari $y = (1 - x)^2(2x + 3)$ adalah ....

Jawab:

Misalkan, $u = (1 - x)^2$ maka $u' = 2(1 - x)(-1) = -2(1 - x)$.

Misalkan, $v = (2x + 3) \to v' = 2$

$y = uv$

$y' = u'v + uv'$

$= -2(1 - x)(2x + 3) + (1 - x)^2(2)$

$= 2(1 - x)[(-2x - 3) + (1 - x)]$

$= 2(1 - x)(-3x - 2)$

$= 2(1 - x)(-1)(3x + 2)$

$= 2(x - 1)(3x + 2)$.

Soal UMPTN 1999

6. Turunan Fungsi $y = u^n$

Diketahui $y = f(u)$ dengan $f(u) = u^n$ dan $u = g(x)$. Jika fungsi $u = g(x)$ dapat diturunkan di $x = a$, untuk a bilangan real maka

$$g'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(a + \Delta x) - g(a)}{\Delta x}$$

Oleh karena a bilangan real sebarang maka

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \to g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Dengan cara yang sama, dapatkah Anda memperoleh $f'(u) = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$?

Untuk Δx mendekati nol maka Δu mendekati nol sehingga

$$f'(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \text{ dan } g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u)g'(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u)g'(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)g'(x)$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = f'(u)u'(x)$$

$f(u) = u^n$, $f'(u) = nu^{n-1}$ sehingga $y'(x) = nu^{n-1}u'(x)$.
Untuk $y = u^n$ maka $y' = nu^{n-1}u'(x)$.

Contoh 8.15

Tentukan turunan fungsi berikut.

a. $f(x) = (2 + 3x^2)^9$

b. $f(x) = (5 + 2x)^3 + \sqrt{2x+1}$

c. $f(x) = 3\sin^3 \frac{1}{x} + 2\cos^2 \frac{x}{2}$.

Jawab:

a. $f(x) = (2 + 3x^2)^9$

Misalkan, $u = 2 + 3x^2$ maka $u'(x) = 6x$ sehingga $f(x) = u^9$

$f'(x) = 9u^8 \cdot u'(x) = 9(2 + 3x^2)^8 \cdot 6x = 54x(2 + 3x^2)^8$

b. $f(x) = (5 + 2x)^3 + \sqrt{2x+1} = (5+2x)^3 + (2x+1)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 3(5 + 2x)^2 \cdot 2 + \frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = 6(5 + 2x)^2 + \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

c. $$f'(x) = 3\left(3\sin^2 \frac{1}{x}\right)\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{9}{x^2}\sin^2\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

7. Aturan Rantai

Perhatikan kembali uraian materi tentang fungsi $y = u^n$. Dari uraian tersebut, diperoleh bahwa untuk $y = f(u) = u^n$ dengan $u = g(x)$ maka turunannya $y' = nu^{n-1}\, u'(x)$. Hasil tersebut menggambarkan aturan rantai.

Misalkan, $y = f(u)$ dan $u = g(x)$.

$$(f \circ g)(x) = f\{g(x)\} = f(u) = y$$

Jika fungsi g mempunyai turunan di x dan fungsi f mempunyai turunan di u, turunan fungsi komposisi $y = f\{g(x)\} = f \circ g(x)$ ditentukan sebagai berikut.

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

atau $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$.

Contoh 8.16

Tentukan turunan fungsi $y = \left(\sqrt{x} - 3\right)^6$.

Jawab:

Misalkan, $u = \sqrt{x} - 3$ maka $y = u^6$.

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{du} = 6u^5$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
&= 6u^5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= 6\left(\sqrt{x} - 3\right)^5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{3\left(\sqrt{x} - 3\right)^5}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

8. Turunan Fungsi $y = \dfrac{u}{v}$

Diketahui, fungsi $y = f(x)$ dengan $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, dalam hal ini $u(x)$ dan $v(x)$ fungsi yang dapat diturunkan di $x = a$ untuk a bilangan real maka

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(a+\Delta x)}{v(a+\Delta x)}-\dfrac{u(a)}{v(a)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(a)u(a+\Delta x)-u(a)v(a+\Delta x)}{\Delta x v(a)v(a+\Delta x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(a)u(a+\Delta x)-v(a)u(a)+u(a)v(a)-u(a)v(a+\Delta x)}{\Delta x\, v(a)v(a+\Delta x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(a)\left(\dfrac{u(a+\Delta x)-u(a)}{\Delta x}\right)-u(a)\left(\dfrac{v(a+\Delta x)-v(a)}{\Delta x}\right)}{v(a)v(a+\Delta x)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(a)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(a+\Delta x)-u(a)}{\Delta x}-\lim\limits_{\Delta x\to 0}u(a)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{v(a+\Delta x)-v(a)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(a)v(a+\Delta x)}$$

$$=\frac{u'(a)\cdot v(a)-u(a)\cdot v'(a)}{v(a)\cdot v(a)}=\frac{u'(a)\cdot v(a)-u(a)\cdot v'(a)}{\left(v(a)\right)^2}$$

Situs Matematika

Anda dapat mengetahui informasi lain tentang Fungsi dan Turunannya melalui internet dengan mengunjungi situs berikut.

- http://calculus.org
- http://www.walter-fendt.de
- matematika-sma.blogspot.com

Oleh karena itu, jika $y=f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ dengan a sebarang bilangan real sehingga berlaku $f'(a)=\dfrac{u'(a)\cdot v(a)-u(a)\cdot v'(a)}{\left(v(a)\right)^2}$

maka $f'(x)=\dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$.

Untuk $y=\dfrac{u}{v}$, berlaku $y'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Contoh 8.17

Tentukan turunan fungsi berikut.

a. $f(x)=\operatorname{cosec} x$

b. $f(x)=\tan x$

Jawab:

a. $f(x)=\operatorname{cosec} x=\dfrac{1}{\sin x}$

Misalkan $u=1$ maka $u'=0$ dan $v=\sin x$ maka $v'=\cos x$.

$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ sehingga $f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$=\frac{0\cdot\sin x-1(\cos x)}{(\sin x)^2}=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin x}\left(\frac{1}{\sin x}\right)=-\cot x\operatorname{cosec} x$$

b. $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Misalkan $u = \sin x$ maka $u' = \cos x$ dan $v = \cos x$ maka $v' = -\sin x$.

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$= \sec^2 x$.

Contoh 8.18

Tentukan turunan fungsi berikut.

a. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$ b. $f(x) = \dfrac{(x-1)^3(2x+3)}{2x^2}$

Jawab:

a. Misalkan, $u = x - 2$ maka $u' = 1$ dan $v = x + 2$ maka $v' = 1$.

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ sehingga

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$= \frac{(1)(x+2)-(x-2)(1)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}$$

b. $f(x) = \dfrac{(x-1)^3(2x+3)}{2x^2}$

Misalkan, $u = (x-1)^3(2x+3)$ maka $u' = 3(x-1)^2(2x+3) + (x-1)^3(2)$

$v = 2x^2$ maka $v' = -4x$.

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ sehingga $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v(x)}{v^2(x)}$

$$= \frac{\left[3(x-1)^2(2x+3)+(x-1)^3(2)\right](2x)^2 - (x-1)^3(2x+3)(4x)}{(2x^2)^2}$$

$$= \frac{4x^2(x-1)^2\left[6x+9(2x-2)\right]-4x(x-2)^2\left[(x-1)(2x+3)\right]}{4x^4}$$

$$= \frac{4x(x-1)^2\left[x(12x^2+6x-18)-(2x^2+x-3)\right]}{4x^4}$$

$$= \frac{(x-1)^2\left[(12x^3+6x^2-18x-2x^2-x+3)\right]}{x^3}$$

$$= \frac{(x-1)(12x^3+4x^2-19x+3)}{x^3}$$

Pembahasan Soal

Jika $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+4}$, maka turunan $f^{-1}(x)$ adalah ....

Jawab:

$f(x) = \dfrac{3x-2}{x+4}$

$\Rightarrow y = \dfrac{3x-2}{x+4}$

maka $x = \dfrac{4y+2}{3-y}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{4x+2}{3-x}$

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{4(3-x)-(4x+2)(-1)}{(3-x)^2}$$

$$= \frac{14}{(3-x)^2}$$

Soal UMPTN 1997

Contoh 8.19

Sebuah peluru ditembakkan vertikal ke atas dengan kecepatan awal 10 m/detik. Kedudukan peluru setelah t detik memenuhi persamaan $h(t) = 30t - 6t^2$ dengan $h(t)$ adalah tinggi peluru yang diukur dalam meter.

a. Carilah kecepatan peluru pada saat 1,5 detik.

b. Kapan peluru berhenti?

Jawab:

Diketahui:

Kecepatan awal peluru = 10 m/detik.

Kedudukan peluru pada t detik = $h(t) = 30t - 6t^2$.

Ditanyakan:

a. Kecepatan peluru pada saat 1,5 detik.

b. Kapan peluru berhenti.

Pengerjaan:

a. Dalam fisika, kecepatan merupakan turunan dari kedudukan terhadap waktu sehingga $v(t) = h'(t) = 30 - 12t$.
Jadi, kecepatan peluru pada saat $t = 1{,}5$ adalah
$v(1{,}5) = 30 - 12(1{,}5) = 12$ m/detik.

b. Peluru akan berhenti ketika kecepatannya nol sehingga $v(t) = 0$
$\Leftrightarrow 30 - 12t = 0$
$\Leftrightarrow t = 2{,}5$.
Jadi, peluru berhenti pada saat 2,5 detik.

Tes Kompetensi Subbab B

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut.

1. $f(x) = 4x^5 - x^3 + 1$
2. $f(x) = 3\sqrt{2x} - 3x$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{9} + \dfrac{9}{x}$
4. $f(x) = \dfrac{18}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{4x}}$
5. $f(x) = \dfrac{x^3}{4x+1}$
6. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+5}$
7. $f(x) = (x^2 - 1)(x^3 + 3)$
8. $f(x) = x^4(x - 5)$
9. $f(x) = (x^{-3} + 5)(3x^2 - 11)$
10. $f(x) = (x^{\frac{1}{3}} + x)(3x^{\frac{1}{2}} - 4x)$
11. $f(x) = \dfrac{x+8}{x^2+x+2}$
12. $f(x) = x\sqrt{8x+5}$
13. $f(x) = \sin (x + 2)$
14. $f(x) = 5 \sin(3 - x)$
15. $f(x) = x^2 \sin x$
16. $f(x) = 4x^3 \cos(-6x)$
17. $f(x) = \tan (5x + 1)$
18. $f(x) = \tan (x^3 - 5x)$
19. $f(x) = \cot(5x - 3)$
20. Luas permukaan kubus berusuk x cm ditunjukkan oleh fungsi $L(x) = 6x^2$. Tentukan laju perubahan luas (L) terhadap x untuk x = 7 cm dengan cara menghitung $L'(7)$.

21. Panjang dan lebar sebuah persegipanjang adalah $3x + 2$ dan $2x$. Carilah laju perubahan luas terhadap x untuk lebar 6 cm.
22. Sebuah perusahaan memproduksi sejumlah barang (x) dengan biaya $p(x) = 3x^2 - 2x + 15$. Jika biaya total marginal didefinisikan sebagai $\frac{dp}{dx}$, tentukan biaya total marginal untuk memproduksi barang itu. Berapa biaya total untuk memproduksi 20 barang?
23. Pendapatan koperasi "Maju" dalam x tahun, mulai 1 Januari 2004 adalah
$$P(x) = \frac{3}{4}x^2 + 3x + 20,$$
dengan P dalam jutaan rupiah.
    a. Tentukan laju perubahan sesaat P pada 1 Januari 2006.
    b. Tentukan laju perubahan sesaat P pada 1 Januari 2009.
24. a. Misalkan pertumbuhan bakteri pada waktu t memenuhi persamaan $N(t) = 3t^2\sqrt{t}$.
    Tentukan laju pertumbuhan bakteri tersebut.
    b. Populasi penduduk pada suatu daerah memenuhi persamaan
$$N = 240.000 - \frac{4}{t+3} + \frac{3.600}{(t+3)^2}.$$
    Tentukan $\frac{dN}{dt}$.

C. Persamaan Garis Singgung pada Kurva

Telah Anda ketahui bahwa kemiringan (gradien) garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $A(a, f(a))$ adalah

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Persamaan garis lurus yang melalui titik $P(x_1, y_1)$ dengan gradien m adalah

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Dengan demikian, persamaan garis singgung g di titik $A(a, f(a))$ pada kurva adalah

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)\,(x - a)}$$

Contoh 8.20

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva berikut.

a. $f(x) = x^2$ di titik (–2, 4)

b. $y = x^3$ di titik yang memiliki absis $x = 1$ dan $x = 2$.

Jawab:

a. Persamaan garis singgung pada kurva $f(x) = x^2$ di titik (–2, 4) adalah $y - 4 = f'(-2)\,(x - (-2))$.

$f(x) = x^2$ maka $f'(x) = 2x$ sehingga $f'(-2) = 2(-2) = -4$

Jadi, persamaan garis singgung pada kurva $f(x) = x^2$ di titik (–2, 4) adalah $y - 4 = -4\,(x + 2) \Leftrightarrow y = -4x - 4$.

b. *Untuk absis $x = 1$.*

Persamaan garis singgung pada kurva $f(x) = x^3$ adalah

$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$f(1)$ dan $f'(1)$ ditentukan sebagai berikut: $f(x) = x^3$ maka $f(1) = 1^3 = 1$.

$f'(x) = 3x^2$ sehingga $f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$

Jadi, persamaan garis singgung pada kurva $f(x) = x^3$ di titik $(1, 1)$ adalah $y - 1 = 3(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x - 2$.

Untuk absis $x = 2$.

Persamaan garis singgung pada kurva $f(x) = x^3$ adalah

$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$f(2)$ dan $f'(2)$ ditentukan sebagai berikut: $f(x) = x^3$ maka $f(2) = 2^3 = 8$.

$f'(x) = 3x^2$ sehingga $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$

Jadi, persamaan garis singgung pada kurva $f(x) = x^3$ di titik $(2,8)$ adalah $y - 8 = 12(x - 2) \Leftrightarrow y = 12x - 16$.

Pembahasan Soal

Kurva $y = (x^2 + 2)^2$ memotong sumbu-y di titik A. Persamaan garis singgung pada kurva tersebut di A adalah ....

Jawab:

A adalah titik potong kurva $y = (x^2 + 2)^2$ terhadap sumbu-y.

absis $x_A = 0$

$y_A = (0 + 2)^2 = 4$

$m = \frac{dy}{dx} = 2(2x)(x^2 + 2)$

$m_A = 2(0)(0 + 2) = 0$

Persamaan garis singgung

$y - y_A = m_A(x - x_A)$

$y - 4 = 0 \rightarrow \mathbf{y = 4}$

Soal UMPTN 2001

Menentukan Persamaan Garis Singgung pada Kurva jika Gradien Garis Singgung Diketahui

Untuk menentukan persamaan garis singgung pada kurva apabila gradien garis singgung diketahui, pelajari beberapa contoh berikut.

Contoh 8.21

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva berikut.

a. $y = f(x)$ di titik $(1, 4)$ jika $f'(x) = 3x^2 + 6x$

b. $y = f(x)$ dengan $f(x) = 2x^3$ yang tegak lurus terhadap garis $y = -\frac{1}{24}x$.

Jawab:

a. Persamaan garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik $(1, 4)$, menurut rumus adalah $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$. Diketahui $f(1) = 4$ dan $f'(x) = 3x^2 + 6x$ maka

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 9$.

Jadi, persamaan garis singgung di titik $(1, 4)$ adalah

$y - 4 = 9(x - 1) \Leftrightarrow y = 9x - 5$.

b. Jika g: $y = mx + n$ adalah garis singgung pada kurva $y = 2x^3$ dan tegak lurus terhadap garis h: $y = -\frac{1}{24}x$ maka $m\left(-\frac{1}{24}x\right) = -1$

$\Leftrightarrow m = 24$.

Persamaan garis singgung pada kurva $y = 2x^3$ adalah $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ dengan x_1 absis titik singgung pada kurva $y = 2x^3$. Selanjutnya, nilai x_1 ditentukan sebagai berikut.

$f'(x) = 6x^2$ maka $f'(x_1) = 6x_1^2$.

Diketahui $f'(x_1) = 24$ sehingga $6x_1^{\,2} = 24 \Leftrightarrow x_1^{\,2} = 4 \Leftrightarrow x_1 = \pm 2$. Untuk $x_1 = 2$, diperoleh $f(x_1) = 2 \cdot 2^3 = 16$. Persamaan garis singgung yang tegak lurus terhadap garis $y = -\frac{1}{24}x$ adalah $y - 16 = 24(x - 2) \Leftrightarrow y = 24x - 32$.
Coba Anda tentukan persamaan garis singgung untuk $x_1 = -2$.

Tes Kompetensi Subbab C

Kerjakanlah pada buku latihanmu.

1. Tentukan persamaan garis singgung kurva-kurva berikut.
   a. $f(x) = x^2$ di titik (2,4)
   b. $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$ di titik (2,–1)
   c. $f(x) = x^3 + 1$ di titik (–1, 0)
   d. $f(x) = x^2 - 3x - 7$ di $x = 4$

2. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ pada titik yang diketahui jika gradien garis singgungnya diberikan oleh persamaan berikut.
   a. $f'(x) = 4x - 4$ di (1,–2)
   b. $f'(x) = 2 - 6x$ di (0,0)
   c. $f'(x) = 3x^2 - 2$ di (–1,1)
   d. $f'(x) = 3 - 3x^2$ di (2,–2)

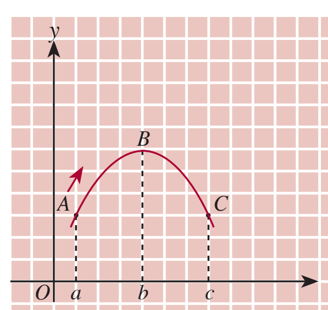
3. **a.** Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = 2x^2 - 3x$ yang sejajar garis $y = x$.
   b. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - 4x + 5$ yang tegak lurus $y = -2x + 3$.
   c. Tentukan koordinat pada kurva $y = x^2 + 3x - 10$ agar garis singgung kurva di titik itu mempunyai gradien 7.
   d. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x - \frac{1}{x^2}$ di titik potong kurva itu dengan sumbu-x.

4. Garis $y = x + 1$ memotong parabola $y = x^2 + 2x + 1$ di titik A dan B. Tentukan persamaan garis singgung parabola itu di titik A dan B.

5. Garis singgung kurva $y = \frac{1}{4}x^2$ di titik (2,1) memotong sumbu-x di titik A dan memotong sumbu-y di titik B. Tunjukkan bahwa koordinat titik A dan B adalah $A(1,0)$ dan $B(0,–1)$.

D. Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Diketahui, sebuah peluru ditembakkan ke atas dan lintasannya digambarkan sebagai kurva dari fungsi $y = f(x)$, seperti pada Gambar 8.5.

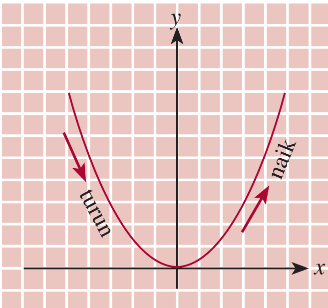


Gambar 8.5

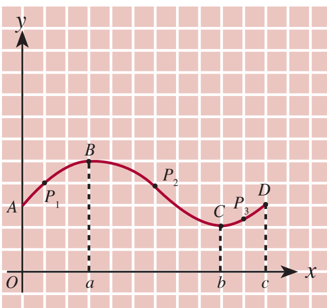
Peluru bergerak naik dari titik A ke titik B, kemudian bergerak turun dari titik B ke titik C. Dikatakan f disebut *naik* dalam daerah $D_f = \{x | a \le x \le b\}$ sebab semakin besar nilai x menyebabkan nilai fungsi f semakin bertambah besar. Fungsi f disebut *turun* dalam daerah $D_f = \{x | b \le x \le c\}$ sebab semakin besar nilai x menyebabkan nilai fungsi f semakin kecil.

Dari uraian tersebut, dapatkah Anda menyatakan suatu fungsi f disebut monoton naik dan suatu fungsi f disebut monoton turun?

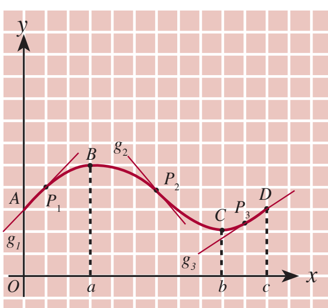
Cobalah nyatakan dengan kata-kata Anda sendiri.



Gambar 8.6



Gambar 8.7



Gambar 8.8

Definisi 8.1

Misalkan f terdefinisi pada selang I. Kita katakan bahwa:

- f monoton naik pada I jika untuk setiap pasangan bilangan a dan b dalam I, $a < b$ mengakibatkan $f(a) < f(b)$;
- f monoton turun pada I jika untuk setiap pasangan bilangan a dan b dalam I, $a < b$ menyebabkan $f(a) > f(b)$.

Sekarang amati Gambar 8.7. Titik P_1 adalah titik sebarang pada grafik yang terletak pada selang $(0, a)$, titik P_2 adalah titik sebarang pada grafik yang terletak pada selang (a, b) dan titik P_3 adalah titik sebarang pada grafik yang terletak pada selang (b, c). Apabila Anda membuat garis singgung di P_1, P_2, dan P_3 yang diberi nama g_1, g_2, dan g_3 seperti pada Gambar 8.8 maka garis singgung g_1 memiliki gradien positif (condong ke kanan), garis singgung g_2 memiliki gradien negatif (condong ke kiri), dan garis singgung g_3 memiliki gradien positif (condong ke kanan).

Coba Anda jelaskan dengan kata-kata Anda sendiri, mengapa g_1 memiliki gradien positif, g_2 memiliki gradien negatif, dan g_3 memiliki gradien positif.

Gradien garis singgung di suatu titik pada grafik dapat ditentukan dengan turunan fungsi. Untuk fungsi naik dan fungsi turun memenuhi teorema berikut. Misalkan, fungsi f dapat diturunkan pada selang terbuka (a, b).

- Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap x dalam selang (a, b) maka fungsi f naik pada selang (a, b).
- Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap x dalam selang (a, b) maka fungsi f turun pada selang (a, b).

Contoh 8.22

Periksa naik atau turunnya fungsi-fungsi berikut.

1. $f(x) = -x^2$ pada selang $(0,1)$
2. $f(x) = 10x - x^2$ pada selang $(0,10)$

Jawab:

1. $f(x) = -x^2$ maka $f'(x) = -2x$.
   Misalkan, p anggota $(0, 1)$ sehingga $0 < p < 1$.
   $f'(p) = -2p < 0$ untuk $p > 0$ sehingga $f(x) = x^2$ pada selang $(0, 1)$ merupakan fungsi turun.
2. $f(x) = 10x - x^2$ maka $f'(x) = 10 - 2x$.
   Misalkan, p anggota $(0, 10)$ sehingga $0 < p < 10$.
   $f'(p) = 10 - 2p > 0$ untuk $p < 5$ dan $f'(p) = 10 - 2p < 0$ untuk $p > 5$. Dengan demikian, $f(x) = 10x - x^2$ pada selang $(0, 10)$ merupakan fungsi naik dan fungsi turun.

Contoh 8.23

Periksa naik atau turunnya fungsi $f(x) = \cos x$ pada selang-selang berikut.

a. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ **b.** $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$

Jawab:

$f(x) = \cos x$ maka $f'(x) = -\sin x$.

a. $f(x) = \cos x$ pada selang $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Misalkan, p adalah anggota $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sehingga $0 < p < \frac{\pi}{2}$.

$f'(p) = -\sin p < 0$ untuk $0 < p < \frac{\pi}{2}$ sehingga $f(x) = \cos x$ pada selang $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ merupakan fungsi turun.

b. $f(x) = \cos x$ pada selang $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$.

Misalkan, p anggota $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ sehingga $\pi < p < \frac{3}{2}\pi$.

$f'(p) = -\sin p > 0$ untuk $\pi < p < \frac{3}{2}$ sehingga $f(x) = \cos x$ pada selang $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ merupakan fungsi naik.

Contoh 8.24

Tentukan pada interval $(0, 2\pi)$ di mana tempat fungsi $f(x) = \cos (x + \pi)$ merupakan fungsi naik atau fungsi turun.

Jawab:

$f(x) = \cos (x + \pi)$, maka $f'(x) = -\sin (x + \pi)$.

- Agar fungsi $f(x) = \cos (x + \pi)$ merupakan fungsi naik maka $f'(x) > 0$ sehingga $-\sin (x + \pi) > 0$. Untuk menyelesaikan pertidaksamaan ini, gunakan diagram tanda melalui tahapan berikut: $-\sin (x + \pi) = 0$

  $-\sin (x + \pi) = \sin 0 \Leftrightarrow x + \pi = 0 \pm k\, 2\pi$, k bilangan bulat

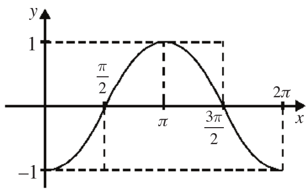
  $x = -\pi \pm k\, 2\pi$

  Oleh karena $x \in (0, 2\pi)$ maka nilai x yang memenuhi adalah $x_1 = \pi$ sehingga diperoleh diagram tanda berikut.

  | +++++ | - - - - - |

  0 π 2π

  Dari diagram tanda tersebut interval yang menghasilkan $-\sin (x + \pi) > 0$ adalah $0 < x < \pi$.



Gambar 8.9

Jadi, $f(x) = \cos(x + \pi)$ merupakan fungsi naik pada interval $0 < x < \pi$, seperti diperlihatkan pada Gambar 8.9.

- Fungsi $f(x) = \cos(x + \pi)$ merupakan fungsi turun, jika $f'(x) < 0$ sehingga $f'(x) = -\sin(x + \pi) < 0$.
  Dengan menggunakan diagram tanda, interval yang menghasilkan $-\sin(x + \pi) < 0$ adalah $\pi < x < 2$.
  Jadi, $f(x) = \cos(x + \pi)$ merupakan fungsi turun pada interval $\pi < x < 2\pi$, seperti diperlihatkan pada Gambar 8.9.

Tes Kompetensi Subbab D

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

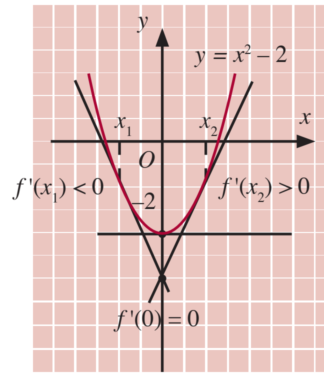
1. Periksalah, apakah fungsi-fungsi berikut pada selang [0,1],[–1.1],[–1,0] merupakan fungsi naik atau fungsi turun.
   a. $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$
   b. $f(x) = x^2 - 16x + 12$
   c. $f(x) = 4 + 10x - x^2$
   d. $f(x) = 1 + x^3$
   e. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
   f. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 7$
2. Periksalah, apakah fungsi-fungsi $f(x)$ pada selang $[0, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \pi]$,$[\pi, \frac{3}{2}\pi]$, $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ merupakan fungsi naik atau fungsi turun.
   a. $f(x) = \sin x$
   b. $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$
   c. $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$
   d. $f(x) = \sin(x - \pi)$
   e. $f(x) = \cos(x + \pi)$
   f. $f(x) = \cos 2x$
3. Tunjukkan bahwa untuk setiap x bilangan real, fungsi $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ selalu turun.
4. Jika $f(x)$ merupakan fungsi naik pada suatu interval I, tunjukkan bahwa
   a. $f(x) + c$ dengan c konstanta juga naik;
   b. $-f(x)$ merupakan fungsi turun.
5. Konsentrasi $K(t)$, suatu obat dalam darah pasien memenuhi persamaan
   $$K(t) = \frac{0{,}16t}{t^2 + 4t + 4},\ 0 < t < 24$$
   dengan t menunjukkan waktu (dalam jam) setelah pemberian obat. Tentukan interval di mana konsentrasi obat naik, dan interval di mana konsentrasi obat turun.

E. Maksimum dan Minimum Fungsi

Anda telah mempelajari fungsi kuadrat dan grafiknya di Kelas IX. Pada pembahasan mengenai hal tersebut, Anda telah dapat menentukan titik ekstrim maksimum atau titik ekstrim minimum dari fungsi kuadrat melalui proses aljabar bilangan real. Perlu diketahui bahwa proses tersebut tidak dapat dikembangkan untuk menentukan titik ekstrim fungsi-fungsi yang lebih rumit. Ternyata dengan menggunakan *turunan* Anda dapat menentukan titik ekstrim segala jenis fungsi yang dapat diturunkan bahkan juga yang kontinu. Agar lebih jelasnya, amati uraian berikut.

Gambar 8.10 memperlihatkan grafik $y = f(x) = x^2 - 2$.

Anda mungkin memahami bahwa fungsi $y = f(x) = x^2 - 2$ mempunyai nilai minimum pada $x = 0$ sebab $f(x) = f(0) = 0^2 - 2 = -2$. Turunan fungsi $f(x) = x^2 - 2$ adalah $f'(x) = 2x$. Anda dapat memeriksa bahwa $f'(x) < 0$ untuk $x < 0$ dan $f'(x) > 0$ untuk $x > 0$ serta $f'(0) = 0$ pada $x = 0$. Oleh karena itu, $f(x)$ turun untuk $x < 0$ dan $f(x)$ naik untuk $x > 0$. Bagaimana dengan fungsi di $x = 0$, apakah naik atau turun? Fungsi $f(x)$ di $x = 0$ tidak turun atau naik, titik ini disebut *titik stasioner*.



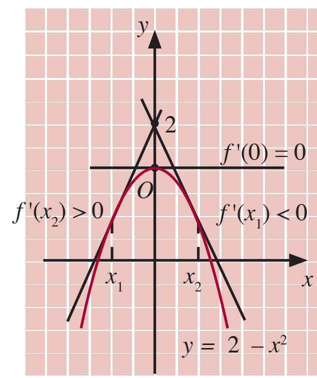
Gambar 8.10

Definisi 8.2

Jika fungsi f mencapai titik ekstrim pada $(a, f(a))$ dan terdiferensialkan pada titik itu maka titik $(a, f(a))$ merupakan titik stasioner atau $f'(x) = 0$.

Jika Anda amati grafik $y = f(x) = x^2 - 2$, tampak adanya perubahan kemonotonan di sekitar $x = 0$ dari turun menjadi naik.

Adanya perubahan kemonotonan dari turun menjadi naik menyebabkan adanya titik minimum sebagai tempat terjadinya perubahan kemonotonan itu sehingga pada titik $x = 0$ fungsi bernilai minimum, yaitu $f(x) = f(0) = -2$.



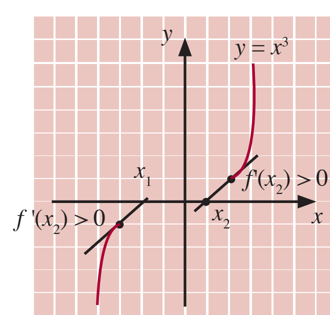
Gambar 8.11

Sekarang, selidiki grafik $y = f(x) = 2 - x^2$ pada Gambar 8.11.

Mudah diselidiki bahwa fungsi $y = f(x) = 2 - x^2$ mempunyai nilai maksimum pada $x = 0$ sebab $f(0) = 2 - 0^2 = 2$. Turunan fungsi $f(x) = 2 - x^2$ adalah $f'(x) = -2x$. Anda dapat menyelidiki bahwa $f'(x) > 0$ untuk $x < 0$ dan $f'(x) < 0$ untuk $x > 0$ serta $f'(0) = 0$ pada $x = 0$. Oleh karena itu, $f(x)$ naik untuk $x < 0$, $f(x)$ turun untuk $x > 0$, dan $x = 0$ adalah titik stasioner. Jika Anda amati grafik $y = f(x) = 2 - x^2$, tampak adanya perubahan kemonotonan di sekitar $x = 0$ dari naik menjadi turun.

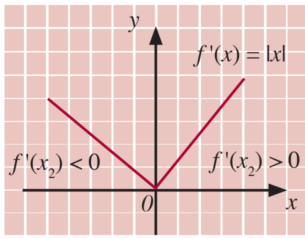
Adanya perubahan kemonotonan dari naik menjadi turun menyebabkan adanya titik maksimum sebagai tempat terjadinya perubahan kemonotonan itu sehingga pada titik $x = 0$ fungsi bernilai maksimum, yaitu $f(x) = f(0) = 2$.

Pembahasan dilanjutkan tentang maksimum dan minimum dengan memeriksa fungsi $f(x) = x^3$ dan $f(x) = |x|$. Kedua grafik tersebut diperlihatkan pada Gambar 8.12.



(a)

- Turunan pertama fungsi $f(x) = x^3$ adalah $f'(x) = 3x^2$. Anda dapat memeriksa bahwa $f'(x) > 0$ untuk $x \neq 0$ dan $f'(x) = 0$ pada $x = 0$. Oleh karena itu, $f(x)$ naik untuk $x < 0$ atau $x > 0$ dan $x = 0$ adalah titik stasioner. Akibatnya, titik stasioner bukan merupakan titik ekstrim (maksimum atau minimum). Anda dapat mengamati dari Gambar 8.12(a) bahwa grafik $y = x^3$ selalu naik di sekitar $x = 0$.



(b)

Gambar 8.12

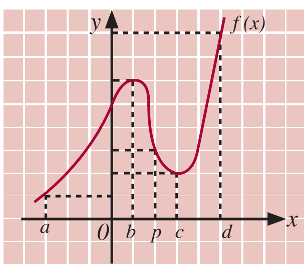
- Pada gambar 8.12(b), $f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ jika } x \geq 0 \\ -x \text{ jika } x > 0 \end{cases}$

sehingga $f'(x) = -1 < 0$ untuk $x < 0$ dan $f'(x) = 1 > 0$ untuk $x > 0$. Adapun untuk menentukan $f'(0)$ digunakan konsep limit, yaitu sebagai berikut.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

Dari Bab 7 tentang pengertian limit telah diterangkan bahwa limit fungsi tersebut tidak ada.

Jadi, $f'(0)$ tidak ada atau f tidak terdiferensialkan. Oleh karena itu, $f(x)$ turun untuk $x < 0$, $f(x)$ naik untuk $x > 0$, dan $x = 0$ bukan merupakan titik stasioner sehingga pada $x = 0$ fungsi bernilai minimum.



Gambar 8.13

Sekarang amati Gambar 8.13.

Diketahui, fungsi $f(x)$ terdefinisi pada interval $a \leq x \leq d$ serta $f'(b) = f'(c) = 0$.

Dari Gambar 8.13. diperoleh uraian berikut.

a. Untuk $D_f = [a, p]$ atau $D_f = \{x \mid a \leq x \leq p\}$,
   - nilai maksimum fungsi $f(x)$ adalah $f(b)$ sehingga $x = b$ menyebabkan $f'(b) = 0$;
   - nilai minimum fungsi $f(x)$ adalah $f(a)$ dan $x = a$ merupakan titik ujung kiri interval D_f.

   Nilai $f(b) > f(x)$ untuk x anggota $D_f = [a, p]$ sehingga $f(b)$ dinamakan nilai maksimum mutlak atau nilai maksimum global. Oleh karena $f(a) < f(x)$ untuk x anggota $D_f = [a, p]$ maka $f(a)$ disebut nilai *minimum mutlak* atau *nilai minimum* global.

b. Untuk $D_f = [p, d]$ atau $D_f = \{x \mid p \leq x \leq d\}$,
   - nilai maksimum fungsi $f(x)$ adalah $f(d)$ dan $x = d$ merupakan titik ujung kanan interval D_f;
   - nilai minimum fungsi $f(x)$ sama dengan $f(c)$ dan $x = c$ menyebabkan $f'(x) = 0$.

   Untuk $D_f = [p, d]$ nilai maksimum dan minimum fungsi $f(x)$ merupakan *nilai maksimum* dan *minimum global*.

c. Untuk $D_f = [a, d]$ atau $D_f = \{x \mid a \leq x \leq d\}$,
   - nilai balik maksimum $f(b)$ bukan merupakan nilai maksimum fungsi $f(x)$, tetapi dinamakan nilai maksimum lokal atau maksimum relatif;
   - nilai balik minimum $f(c)$ bukan merupakan nilai minimum fungsi $f(x)$ akan tetapi dinamakan nilai *minimum lokal* atau *minimum relatif*.

Untuk menentukan nilai minimum atau maksimum fungsi $f(x)$ dalam interval tertutup, terlebih dahulu ditentukan nilai $f(x)$ untuk nilai x sebagai titik ujung interval domain fungsi $f(x)$ dan nilai x yang menyebabkan $f'(x) = 0$. Kemudian, bandingkan nilai-nilai tersebut.

Contoh 8.25

Tentukan nilai maksimum dan minimum $f(x) = 2x^2 - x$, untuk:

a. $D_f = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$,

b. $D_f = \{x \mid -6 \leq x \leq -4\}$.

Jawab:

$f(x) = 2x^2 - x \Leftrightarrow f'(x) = 4x - 1$

$4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

a. $x = \frac{1}{4}$ anggota $D_f = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{8} \qquad \text{....(1)}$$

$$f(-1) = 2(-1)^2 - 1$$
$$= 1 \qquad \text{....(2)}$$
$$f(2) = 2(2)^2 - 2$$
$$= 6 \qquad \text{....(3)}$$

Dari (1), (2), dan (3), diperoleh $f(2) = 6$ adalah nilai maksimum dan $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$ merupakan nilai minimum fungsi $f(x) = 2x^2 - x$ dengan

$D_f = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$.

b. $x = \frac{1}{4}$ bukan anggota $D_f = \{x \mid -6 \leq x \leq -4\}$

$f(-6) = 2(-6)^2 - (-6) = 78$

$f(-4) = 2(-4)^2 - (-4) = 36$

Jadi, fungsi $f(x) = 2x^2 - x$ dengan $D_f = \{x \mid -6 \leq x \leq -4\}$ mempunyai nilai maksimum $f(-6) = 78$ dan nilai minimum $f(-4) = 36$.

Soal Terbuka

Arif memiliki kawat yang panjangnya 28 cm kawat. Ia akan membuat bingkai berbentuk persegipanjang. Tentukan ukuran bingkai yang mungkin. Tentukan pula ukuran bingkai yang akan memberikan luas maksimum.

Contoh 8.26

Selembar aluminium akan dibuat silinder tanpa tutup dengan volume 8.000π cm^3. Tentukan tinggi dan jari-jari alas silinder agar aluminium yang digunakan seminimal mungkin.

Jawab:

Diketahui: Volume silinder tanpa tutup yang dibuat 8.000π cm^3.

Ditanyakan: Tinggi dan jari-jari alas silinder agar luas aluminium minimal.

Pengerjaan:

Misalkan, volume silinder = $V(r)$, tinggi silinder = t, jari-jari alas silinder = r, dan luas permukaan silinder = $L(r)$.

$$V_{(r)} = \text{luas alas} \times \text{tinggi}$$
$$= \pi r^2 \times t = 8.000\pi$$

sehingga $t = \dfrac{8.000\pi}{\pi r^2} = \dfrac{8.000}{r^2}$ ....(1)

$L(r) =$ luas alas + luas selubung = $\pi r^2 + 2\pi rt$ ....(2)

Substitusikan (1) ke (2) sehingga diperoleh

$$L(r) = \pi r^2 - 2\pi r\left(\frac{8.000}{r^2}\right) = \pi r^2 + 2\pi rt$$

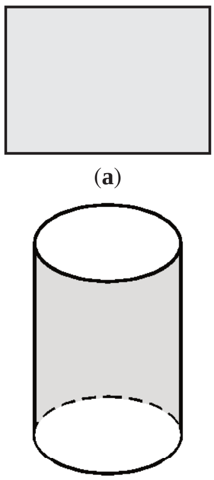
Nilai stasioner $L(r)$ diperoleh jika nilai $L'(r) = 0$ sehingga

$$L'(r) = 2\pi r - \frac{16.000\pi}{r^2}$$
$$\Leftrightarrow 2\pi r - \frac{16.000\pi}{r^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\pi r = \frac{16.000\pi}{r^2}$$
$$\Leftrightarrow r^3 = 8.000$$
$$\Leftrightarrow r = 20 \quad ....(3)$$

Substitusikan (3) ke (1) sehingga diperoleh

$$t = \frac{8.000}{r^2} = \frac{8.000}{400} = 20$$

Jadi, tinggi silinder $t = 20$ cm dan jari-jari alas $r = 20$ cm.



Gambar 8.14
(a) Selembar aluminium.
(b) Silinder yang akan dibuat.

Contoh 8.27

Jumlah bahan bakar solar selama satu tahun yang dibutuhkan oleh suatu kendaraan yang bergerak dengan kecepatan v km/jam memenuhi persamaan

$$Q(v) = -\frac{1}{65}v^2 + 2v + 2.500 \text{ liter}$$

Tentukan jumlah maksimum solar yang dibutuhkan dalam empat tahun.

Jawab:

$$Q(v) = -\frac{1}{65}v^2 + 2v + 2.500 \text{ liter}$$

Nilai stasioner $Q(v)$ diperoleh jika $Q'(v) = 0$ sehingga

$$Q'(x) = -\frac{2}{65}v + 2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{65}v = 2 \Leftrightarrow v = 65$$

Jumlah maksimum solar yang dibutuhkan selama satu tahun adalah

$$Q(65) = -\frac{1}{65}(65)^2 + 2(65) + 2.500 = 2.565 \text{ liter}$$

Jumlah maksimum solar yang dibutuhkan empat tahun adalah $4 \times 2.565 = 10.260$ liter.

Tes Kompetensi Subbab E

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi-fungsi berikut untuk domain yang diberikan.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ dengan
   a. $D_f = \{x \mid -3 \le x \le 0\}$
   b. $D_f = \{x \mid 0 \le x \le 3\}$
   c. $D_f = \{x \mid 3 \le x \le 5\}$
   d. $D_f = \{x \mid 5 \le x \le 7\}$

2. $f(x) = 4x^7 - x^4$ dengan
   a. $D_f = \{x \mid -1 \le x \le 0\}$
   b. $D_f = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$
   c. $D_f = \{x \mid 1 \le x \le 2\}$
   d. $D_f = \{x \mid 2 \le x \le 3\}$

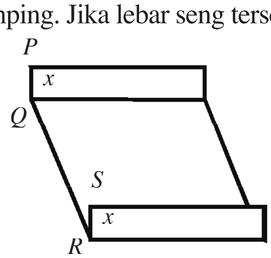
3. $f(x) = (x-2)^2(x-5)$ dengan
   a. $D_f = \{x \mid 0 \le x \le 2\}$
   b. $D_f = \{x \mid 2 \le x \le 4\}$
   c. $D_f = \{x \mid 3 \le x \le 5\}$
   d. $D_f = \{x \mid 5 \le x \le 7\}$

4. Jika fungsi $f(x) = x^3 + px + 3$ dengan daerah asal $D_f = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$ mencapai nilai minimum relatif di $x = 1$, tentukan nilai $f(1)$ dan p.

5. Jumlah dua bilangan bulat sama dengan 8. Tentukan bilangan-bilangan tersebut agar jumlah kuadratnya minimum.

6. Menurut Departemen Riset sebuah perusahaan, biaya produksi x unit barang jenis A sebesar $2x^3 - 4.000x^2 + 6.000.000x$ rupiah per hari. Jika barang diproduksi, tentukan jumlah unit per hari yang harus diproduksi agar biaya produksi per unitnya minimum.

7. Dari selembar seng berbentuk persegipanjang, akan dibuat talang air. Kedua tepinya dilipat selebar x, seperti pada gambar di samping. Jika lebar seng tersebut 40 cm,



   a. tunjukkan bahwa luas penampang talang adalah $L(x) = 40x - 2x^2$;
   b. tentukan ukuran penampang $L(x) = 40x - 2x^2$.

8. Luas sebuah juring lingkaran yang berjari-jari r adalah 4cm^2.
   a. Tunjukkan bahwa kelilingnya adalah $K(r)$ cm dengan $K(r) = 2\left(r + \frac{4}{r}\right)$.
   b. Tentukan nilai minimum K.

9. Suatu perusahaan membuat kaleng berbentuk tabung tertutup dengan volume V. Upah buruh (c) berbanding langsung dengan panjang bagian yang dipatri, yaitu jumlah tinggi kaleng dengan dua kali keliling alas kaleng.
   a. Jika tinggi kaleng t dan jari-jari alas r, buktikan bahwa $c = k\left(\frac{V}{\pi r^2} + 4\pi r\right)$ dengan k = konstanta.
   b. Buktikan bahwa upah buruh (c) paling murah jika tinggi kaleng sama dengan keliling alasnya.

10. Rata-rata pertumbuhan suatu bakteri setelah t menit diberikan oleh persamaan $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$, $0 \le t \le 20$
Tentukan kapan pertumbuhan bakteri tersebut
   a. menurun,
   b. meningkat, dan
   c. mencapai maksimum.

11. Setelah satu jam x miligram obat tertentu diberikan kepada seseorang, perubahan temperatur (dinyatakan dalam Fahrenheit) dalam tubuhnya diberikan oleh persamaan

$$T(x) = x^2\left(1 - \frac{x}{9}\right),\ 0 \le t \le 6$$

Rata-rata perubahan $T(x)$ bersesuaian dengan ukuran dosis x. $T(x)$ disebut sensitivitas tubuh terhadap dosis obat.

a. Kapan sensitivitas tubuh meningkat?
b. Kapan sensitivitas tubuh menurun?
c. Berapakah nilai maksimum sensitivitas tubuh?

12. Kecepatan suatu reaksi kimia yang bergantung pada jumlahnya memenuhi persamaan $v = k\ (300x - 2x^2)$, dengan k adalah konstanta. Tentukan jumlah zat tersebut agar kecepatan reaksi minimum.
13. Jika impedansi suatu rangkaian listrik memenuhi persamaan $Z = \sqrt{R^2 + (x_1 - x_c)^2}$, tentukan X_C agar Z minimum. (Diketahui: $R = 1.500$ dan $X_L = 1.000$)

F. Turunan Kedua

Anda telah mempelajari turunan pertama fungsi yang dinotasikan dengan

$$\frac{dy}{dx} \text{ atau } y' \text{ atau } \frac{df}{dx} \text{ atau } f'(x)$$

Fungsi turunan dari turunan pertama dinamakan fungsi turunan kedua yang dinotasikan dengan

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} \text{ atau ditulis } y''$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2f}{dx^2} \text{ atau ditulis } f''(x)$$

Turunan kedua fungsi $f(x)$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} \text{ atau } y'' \text{ atau } \frac{d^2f}{dx^2} \text{ atau } f''(x)}$$

Contoh 8.28

Tentukan turunan kedua untuk fungsi berikut.

a. $f(x) = 2x^4 - 5x$ b. $f(x) = \sqrt{x} \sin x$

Jawab:

a. $f(x) = 2x^4 - 5x$
$f'(x) = 8x^3 - 5$
$f''(x) = 24x^2$
Turunan kedua fungsi $f(x) = 2x^4 - 5x$ adalah $f''(x) = 24x^2$.

b. $f(x) = \sqrt{x} \sin x$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \sin x + \sqrt{x} \cos x = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x + \sqrt{x} \cos x$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\sin x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cos x = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cos x - \sqrt{x}\,\sin x$$

$$= -\frac{1}{4x\sqrt{x}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{x}}\cos x - \sqrt{x}\ \sin x$$

Turunan kedua dari $f(x) = \sqrt{x}\ \sin x$ adalah

$$f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{x}}\cos x - \sqrt{x}\ \sin x.$$

Contoh 8.29

Sebuah benda yang bergerak lurus pada lintasan (s) memenuhi persamaan $t^3 - 6t^2 + 30t$. Dalam hal ini, s dalam meter dan t dalam detik.

a. Hitunglah panjang lintasan pada saat $t = 3$ dan $t = 5$.
b. Tentukan kecepatan dan percepatan benda setelah $t = 4$ detik.
c. Hitunglah laju pada waktu percepatannya nol.

Jawab:

a. Pada saat t=3, panjang lintasannya adalah
$s(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 30 \cdot 3 = 63$ meter
Pada saat $t = 5$, panjang lintasannya adalah
$s(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 30 \cdot 5 = 125$ meter

b. $s = t^3 - 6t^2 + 30t$
Kecepatan $v = \dfrac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 30$
Kecepatan pada $t = 4$ sekon adalah $v(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 30$
$= 30$ m/detik
Pecepatan $a = \dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt} = 6t - 12$
Percepatan pada $t = 4$ sekon adalah $a(4) = 6 \cdot 4 - 12$
$= 12$ m/detik^2

c. $a = 0$ maka $6t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$
$v(t) = 3t^2 - 12t + 30$, untuk $t = 2$ maka $v(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 30$
$= 18$ m/detik

Teorema L' Hopital

Jika $x = a$ disubstitusikan ke bentuk $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ diperoleh bentuk tak tentu $\dfrac{0}{0}$ atau $\dfrac{\infty}{\infty}$, Anda dapat menggunakan teorema L' Hopital. Teorema ini dikemukakan kali pertama oleh *Marquis L' Hopital*, seorang matematikawan Prancis (1661–1704 M).

Definisi 8.3

Jika $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, serta $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ada, baik terhingga atau tak hingga maka $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Perluasan teorema *L'Hopital* adalah

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'''(x)}{g'''(x)}$$

(Proses berakhir jika hasil akhir tidak berbentuk $\frac{0}{0}$).

Contoh 8.30

Tentukan limit fungsi berikut.

a. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$ b. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 4x - 1}{x \sin x}$

Jawab:

a. Jika dengan menggunakan substitusi langsung, diperoleh

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \frac{(2)^2 - 4(2) + 4}{2 - 2} = \frac{0}{0} \text{ (bentuk tak tentu)}$$

Dengan teorema *L' Hopital*, diperoleh

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{2x - 4x + 4}{1} = 2(2) - 4 = 0.$$

b. Jika menggunakan substitusi langsung diperoleh

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 4x - 1}{x \sin x} = \frac{\cos 0 - 1}{0.\sin 0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \text{ (bentuk tak tentu)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 4x - 1}{x \sin x} = \frac{-4 \sin 4x}{x \cos x + \sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-16 \cos 4x}{\cos x - x \sin x + \cos x}$$

$$= \frac{-16 \cos 0}{\cos 0 - .\sin 0 + \cos 0} = \frac{-16.1}{1 - 0 + 1} = -8$$

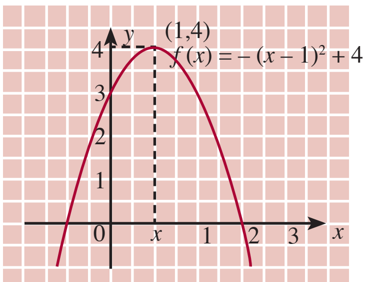
Tes Kompetensi Subbab F

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Tentukan turunan kedua dari fungsi aljabar berikut.
   - **a.** $f(x) = x^5 + 7x^3 + 2x^2 + 12x + 8$
   - **b.** $f(x) = 2\sqrt{x} + 5x^2 - 3x$
   - **c.** $f(x) = 6x^4 + 12\sqrt{x} - \frac{2}{x^3}$
   - **d.** $f(x) = \frac{2}{(x+4)^4}$
   - **e.** $f(x) = (3x - 4)^{10}$
   - **f.** $f(x) = (x^2 + 5)(2x^3 - 3x + 9)$
   - **g.** $f(x) = \frac{2x+{}^5}{2x-1}$
   - **h.** $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$
2. Tentukan turunan kedua dari fungsi-fungsi berikut.
   - **a.** $f(x) = \tan x$
   - **b.** $f(x) = \sin 3x$
   - **c.** $f(x) = \cos \sqrt{x}$
   - **d.** $f(x) = x - \cos x$
   - **e.** $f(x) = \sin x - \cos x$
   - **f.** $f(x) = \tan x^2$
   - **g.** $f(x) = \sin x \cos x$
   - **h.** $f(x) = \sin^2 2x$
3. Tentukan turunan kedua dari fungsi-fungsi berikut.
   - **a.** $f(x) = x^3 - 3x + 2$
   - **b.** $f(x) = x^3 (1 + x)$
   - **c.** $f(x) = (1 - x)(1 + x)^3$
   - **d.** $f(x) = \sin^2 x,\ 0 \le x \le 2\pi$
   - **e.** $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),\ 0 \le x \le 2\pi$
   - **f.** $f(x) = \tan^2 x,\ 0 \le x \le 2\pi$
   - **g.** $f(x) = x \cos x,\ 0 \le x \le 2\pi$
   - **h.** $f(x) = x \tan x,\ 0 \le x \le 2\pi$
4. Kerjakan soal-soal berikut.
   - **a.** Jika $f(x) = \sqrt{3x+7}$, hitunglah $f''(3)$
   - **b.** Jika $f(x) = \sqrt[3]{2x+6}$, hitunglah $f''(1)$
   - **c.** Jika $f(x) = \frac{6}{\sqrt{2x-1}}$, hitunglah $f''(2)$
   - **d.** Jika $f(x) = (x^2 + 1)^3$, hitunglah $f''(4)$
   - **e.** Jika $f(x) = x\sqrt{3+x}$,hitunglah $f''(1)$
   - **f.** Jika $f(x) = 64\sqrt{x+3}$ hitunglah $f''(1)$
   - **g.** Jika $f(x) = \cos x - \sin x$, hitunglah $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$
   - **h.** Jika $f(x) = x \cos x$, hitunglah $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$
5. Sebuah mobil bergerak lurus. Setelah bergerak t sekon, perpindahannya dinyatakan dengan rumus $s(t) = 25t + 10t^2$, $s(t)$ dalam meter. Berapa $^{m}/_{s^2}$ percepatan mobil itu?

G. Nilai Stasioner

1. Pengertian Nilai Stasioner Fungsi



Gambar 8.16

Gambar 8.16 merupakan grafik fungsi $f(x) = -(x-1)^2 + 4$. Turunan pertama dari fungsi $f(x) = -(x-1)^2 + 4$ adalah $f'(x) = -2(x-1)$. Untuk $x = 1$, diperoleh $f'(1) = -2(1-1) = 0$. Oleh karena nilai $f'(1) = 0$ maka fungsi $f(x) = -(x-1)^2 + 4$ mencapai nilai stasioner di $x = 1$ dengan nilai stasioner $f(1) = -(1-1)^2 + 4 = 4$. Selanjutnya, titik (1, 4) disebut titik stasioner.

Dari contoh di atas dapatkah Anda menduga pengertian nilai stasioner fungsi? Cobalah nyatakan dengan kata-kata Anda sendiri. Konsep nilai stasioner fungsi yang telah Anda pelajari tersebut merupakan hal khusus dari hal umum berikut.

Amati $f''(x) > 0$ untuk $x < 0$, dikatakan f cekung ke atas pada $x < 0$, $f''(x) < 0$ untuk $0 < x < 2$, dikatakan f cekung ke bawah pada $0 < x < 2$, dan $f''(x) > 0$ pada $x > 2$, dikatakan f cekung ke atas pada $x > 2$.

Di sekitar $x = 0$ (titik (0, 0)) terjadi perubahan kecekungan dari cekung ke atas menjadi cekung ke bawah sehingga titik (0, 0) merupakan titik belok grafik fungsi f. Apakah titik (2, 0) merupakan titik belok? Bagaimana dengan titik (3, 0)?

Dari uraian tersebut, dapatkah Anda menyatakan pengertian nilai stasioner fungsi? Cobalah nyatakan pengertian nilai stasioner fungsi dengan kata-kata Anda sendiri.

Definisi 8.4

Diketahui fungsi $y = f(x)$ kontinu dan dapat diturunkan (*diferentiable*) di $x = c$. Fungsi $y = f(x)$ memiliki nilai stasioner $f(c)$ jika $f'(c) = 0$ dan titik $(c, f(c))$ disebut titik stasioner.

Contoh 8.31

1. Tentukan nilai stasioner fungsi $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$.
2. Tentukan nilai stasioner dan jenisnya untuk fungsi $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$.

Jawab:

1. $f(x) = 3x^2 - 6x + 5 \Rightarrow f'(x) = 6x - 6$

   Nilai stasioner diperoleh jika $f'(x) = 0$ sehingga

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 6x - 6 &= 0 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

$f(1) = 3.1^2 - 6.\ 1 + 5 = 2$

Jadi, nilai stasioner $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ adalah $f(1) = 2$

2. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$

$f'(x) = 3x^2 + 8x - 3$

untuk $f'(x) = 0$

$3x^2 + 8x - 3 = 0$

$(3x - 1)(x + 3) = 0$

$x = \frac{1}{3}$ atau $x = -3$

$\Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ dan $f'(-3) = 0$

sehingga untuk $x = \frac{1}{3}$ diperoleh

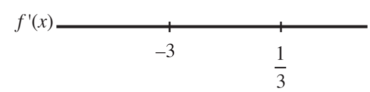
$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{3}\right) + 2 = 1\frac{13}{27}$$

untuk $x = -3$ diperoleh $f(-3) = (-3)^3 + 4\ (3)^2 - 3.3 + 2 = 2$

Jadi, nilai stasioner $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ adalah $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1\frac{13}{27}$ dan $f(-3) = 2$.

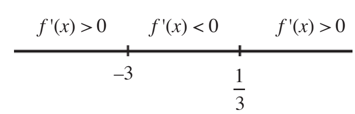
Titik $\left(\frac{1}{3}, 1\frac{13}{27}\right)$ dan $(-3, 2)$ dinamakan titik stasioner.

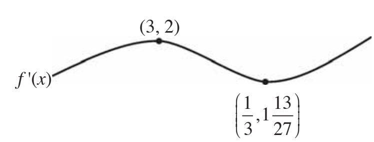
Untuk menentukan jenis stasioner, pelajari interval $f'(x)$ di samping.



Untuk mengetahui nilai $f'(x)$ pada selang $x < -3$, $-3 < x < \frac{1}{3}$, dan $x > \frac{1}{3}$, substitusikan nilai x untuk selang interval tersebut pada $f'(x)$ sehingga diperoleh

- untuk $x = -4$, $f'(-4) = 13 > 0$ sehingga $f(x)$ naik untuk $x < -3$;
- untuk $x = 0$, $f'(0) = -3 < 0$ sehingga $f(x)$ turun untuk interval $-3 < x < \frac{1}{3}$;
- untuk $x = 1$, $f'(1) = 8 > 0$ sehingga $f(x)$ naik untuk $x > \frac{1}{3}$.





Jadi, nilai $f'(x)$ dapat digambarkan pada selang interval di samping.

Dari gambar untuk selang interval tersebut

- titik $(-3, 2)$ adalah titik maksimum,
- titik $\left(\frac{1}{3}, 1\frac{13}{27}\right)$ adalah titik minimum.

2. Menentukan Nilai Stasioner Suatu Fungsi

Anda telah mempelajari cara menentukan nilai stasioner dengan uji tanda turunan pertama. Misalkan, fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2$ dengan $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Untuk $f'(x) = 0$ diperoleh titik-titik stasioner $(0, 0)$ dan $(2, -4)$, dengan $(0, 0)$ dinamakan titik balik maksimum lokal, sedangkan $(2, -4)$ dinamakan titik balik minimum lokal. Sekarang, pelajarilah cara menentukan nilai stasioner suatu fungsi dan penerapannya menggunakan turunan kedua.

Dengan menggunakan turunan kedua jenis titik stasioner dapat ditentukan sebagai berikut.

- Jika $f''(c) < 0$, $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal fungsi $f(x)$ dan titik $(c, f(c))$ adalah titik balik maksimum lokal grafik fungsi $f(x)$.
- Jika $f''(c) > 0$, $f(c)$ adalah nilai minimum lokal fungsi $f(x)$ dan titik $(c, f(c))$ adalah titik balik minimum lokal grafik fungsi $f(x)$.
- Jika $f''(c) = 0$ atau tidak mempunyai turunan kedua, jenis nilai stasioner dilakukan dengan menggunakan *uji turunan pertama*.

Contoh 8.32

Tentukan jenis nilai stasioner fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ dan $f(x) = x^4 - 4x^3$ dengan menggunakan uji turunan kedua.

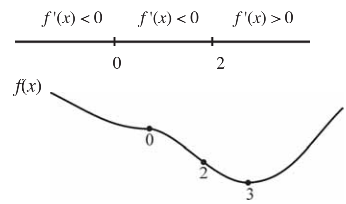
Jawab:

- Untuk fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$
  $f''(x) = 6x - 12$
  Nilai stasioner diperoleh untuk $f'(x) = 0$, yaitu
  $3(x - 1)(x - 3) = 0$
  $x = 1$ atau $x = 3$
  Nilai stasionernya adalah $x = 1$ atau $x = 3$
  untuk $x = 1$, $f''(1) = -6 < 0$, sedangkan
  untuk $x = 3$, $f''(3) = 6 > 0$ sehingga
  $f(1)$ adalah nilai maksimum lokal fungsi $f(x)$, yaitu $f(1) = 5$
  $f(3)$ adalah nilai minimum lokal fungsi $f(x)$, yaitu $f(3) = 1$
- Untuk fungsi $f(x) = x^4 - 4x^3$
  $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$
  $f''(x) = 12x^2 - 24x$
  Nilai stasioner diperoleh untuk $f'(x) = 0$, yaitu $x = 0$ atau $x = 3$
  untuk $x = 0$, $f''(0) = 0$ dan
  untuk $x = 3$, $f''(3) = 36 > 0$ sehingga

$f(3)$ adalah nilai minimum lokal fungsi $f(x)$, yaitu $f(3) = -27$. Untuk $x = 0$ dengan $f''(0) = 0$ jenis nilai stasioner ditentukan dengan uji turunan pertama.

Sekarang, amati diagram di samping.

Amati $f''(x) > 0$ untuk $x < 0$, dikatakan f cekung ke atas pada $x < 0$, $f''(x) < 0$ untuk $0 < x < 2$, dikatakan f cekung ke bawah pada $0 < x < 2$, dan $f''(x) > 0$ pada $x > 2$, dikatakan f cekung ke atas pada $x > 2$.



Di sekitar $x = 0$ (titik (0, 0)) terjadi perubahan kecekungan dari cekung ke atas menjadi cekung ke bawah sehingga titik (0, 0) merupakan titik belok grafik fungsi f. Apakah titik (2, 0) merupakan titik belok? Bagaimana dengan titik (3, 0)?

Dari contoh tersebut dapatkah Anda menduga cara menentukan nilai stasioner suatu fungsi? Cobalah nyatakan dengan kata-kata Anda sendiri. Konsep yang telah Anda pelajari tersebut membawa kita pada definisi berikut.

Definisi 8.5

f cekung ke atas pada $[a, b]$ jika $f''(x) > 0$ dan f cekung ke bawah jika $f''(x) < 0$. Perubahan kecekungan disebut titik belok.

Tes Kompetensi Subbab G

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

1. Tentukan nilai stasioner, titik stasioner, dan jenisnya untuk fungsi-fungsi berikut.
   a. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$
   b. $f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x$
   c. $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$
   d. $f(x) = x^3(1 - x)$
   e. $f(x) = 3x^4 + 4x^3$
   f. $f(x) = (x^2 - 3x - 4)^2$
2. Tentukan nilai p jika fungsi-fungsi berikut mencapai stasioner untuk nilai x yang diberikan.
   a. $f(x) = x^2 - px + 4,\ x = 2$
   b. $f(x) = px^2 + 4x - 21, x = -2$
   c. $f(x) = p(x - 2)^2 - 1,\ x = 2$
   d. $f(x) = x^3 - px,\ x = 1$
   e. $f(x) = px^3 - 3x + 1,\ x = -1$
   f. $f(x) = 2x^3 - px^2 - 12x,\ x = -1$
   g. $f(x) = px^4 - 4x^3 + 2,\ x = 1$
   h. $f(x) = \dfrac{2x^2}{1+x^2},\ x = 0$
3. Tentukan $f'(x)$ serta nilai stasioner dan jenisnya untuk fungsi-fungsi berikut jika $0 \le x \le 2\pi$.
   a. $f(x) = 2\sin x - x$
   b. $f(x) = \dfrac{x + \cos x}{2}$
   c. $f(x) = \sin x - \cos x$
   d. $f(x) = \cos 2x$
   e. $f(x) = 2 \sin 2x$
   f. $f(x) = x - 2 \cos 2x$
4. Tentukan nilai maksimum dan minimum lokal fungsi-fungsi berikut, menggunakan uji turunan kedua.

a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
b. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$
c. $f(x) = 3x - x^3$
d. $f(x) = 2x^2 - x^4$
e. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$
f. $f(x) = 2x^5 - 3$

5. Sebuah perusahaan komputer mengadakan penelitian pasar untuk produk barunya. Mereka memperoleh suatu kesimpulan bahwa hubungan antara harga h (juta per unit) dan permintaan x (unit per minggu) memenuhi persamaan
   $h = 1.296 - 0,12x^2, 0 < x < 80$.

   Dengan demikian, penghasilan pada akhir minggu dapat ditentukan dengan pendekatan rumus
   $R(x) = 1.296x - 0,12x^3$.

   Tentukan nilai maksimum dan minimum lokal fungsi tersebut.

7. Misalkan, persamaan biaya produksi perusahaan pada soal nomor 6 adalah $C(x) = 830 + 306x$.
   a. Tentukan persamaan yang menyatakan keuntungan perusahaan tersebut.
   b. Tentukan nilai maksimum dan minimum lokal dari fungsi keuntungan tadi.

   Petunjuk: *Keuntungan diperoleh dari pendapatan dikurangi biaya produksi.*

H. Menggambar Grafik Fungsi Aljabar

Di Kelas X, Anda telah mempelajari bagaimana menggambar grafik fungsi $y = ax^2 + bx + c$ dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Menentukan titik potong grafik $y = ax^2 + bx + c$ dengan sumbu-x.
2. Menentukan titik potong grafik $y = ax^2 + bx + c$ dengan sumbu-y.
3. Menentukan koordinat titik balik fungsi.
4. Menentukan persamaan sumbu simetri fungsi.

Langkah-langkah tersebut mudah dilakukan untuk menggambar fungsi parabola $y = ax^2 + bx + c$. Akan tetapi untuk fungsi yang lebih kompleks, Anda tidak menggunakan cara tersebut.

Sekarang, Anda akan mempelajari cara lain untuk menggambar grafik fungsi, yaitu dengan menggunakan turunan. Titik stasioner dan jenisnya adalah alat yang ampuh untuk menggambar grafik fungsi tersebut khususnya untuk mengenali titik-titik tempat terjadinya perubahan ciri-ciri grafik. Untuk memudahkan pengerjaan, berikut ini adalah langkah-langkah yang harus dilakukan.

Langkah 1: *Menganalisis* $f(x)$

a. Menentukan daerah asal fungsi $f(x)$.
b. Menentukan daerah nilai fungsi pada ujung interval daerah asal.

c. Menentukan titik potong dengan sumbu koordinat.
- Titik potong dengan sumbu-x (diperoleh untuk $y = 0$ atau $f(x) = 0$).
- Titik potong dengan sumbu-y (diperoleh untuk $x = 0$ atau $f(0)$).

Langkah 2: *Menganalisis* $f'(x)$

a. Menentukan titik stasioner.
b. Menentukan interval di mana fungsi naik atau turun.
c. Menentukan titik balik maksimum dan minimum lokal (jika ada).
d. Menentukan titik belok fungsi.

Langkah 3: *Membuat sketsa grafik*

a. Menyajikan titik-titik yang diperoleh pada langkah 1 dan 2 pada bidang Cartesius.
b. Membuat sketsa grafik dengan menghubungkan titik-titik tersebut.

Hal Penting

- notasi Leibnitz
- turunan
- gradien
- nilai stasioner

Contoh 8.33

Buatlah sketsa grafik fungsi $f(x) = x^3 + 3x^2$.

Jawab:

Langkah 1: *Menganalisis* $f(x)$

a. Fungsi $f(x) = x^3 + 3x^2$ terdefinisi untuk semua bilangan real. Jadi, daerah asal $f(x)$ adalah $\{x \mid x \in R\}$.

b. Daerah nilai $f(x) = \{f(x) \mid f(x) \in R\}$.

c. Titik potong dengan sumbu koordinat.
- Titik potong dengan sumbu-y.
  Titik potong dengan sumbu-y diperoleh untuk $x = 0$
  $f(x) = x^3 + 3x^2$
  $f(0) = 0$
  Fungsi $f(x)$ memotong sumbu-y di $y = 0$.
- Titik potong dengan sumbu-x.
  Titik potong dengan sumbu-x diperoleh untuk $y = 0$.
  $f(x) = x^3 + 3x^2$
  $y = f(x)$
  $x^3 + 3x^2 = 0$
  $x^2 (x + 3) = 0$
  $x = 0$ atau $x = -3$
  Fungsi $f(x)$ memotong sumbu-x di $x = 0$ atau $x = -3$.

Langkah 2: *Menganalisis* $f'(x)$

$f(x) = x^3 + 3x^2$
$f'(x) = 3x^2 + 6x$

a. Titik stasioner diperoleh untuk $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0$

$\Leftrightarrow 3x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ atau $x = -2$

Titik stasioner diperoleh dengan menyubstitusikan $x = 0$ dan $x = -2$ pada fungsi $f(x) = x^3 + 3x^2$ sehingga diperoleh

$f(0) = 0$ dan $f(-2) = 4$

Jadi, (0, 0) dan (–2,4) adalah titik-titik stasioner.

b. Interval fungsi naik diperoleh jika $f'(x) > 0$ dan interval fungsi turun diperoleh jika $f'(x) < 0$. Interval-interval tersebut diperoleh dengan menentukan nilai-nilai x yang disubstitusikan pada fungsi $f'(x)$. Substitusikan $x = -3$ untuk $x < -2$, $x = -1$ untuk $-2 < x < 0$ dan $x = 1$ untuk $x > 0$ pada fungsi

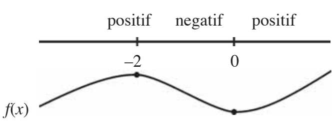
$f'(x) = 3x^2 + 6x$ sehingga diperoleh

$f'(-3) = 9 > 0, f'(-1) = -3$

$f'(1) = 9 > 0$

yang dapat digambarkan sebagai diagram di samping.

$f'(x) \quad f'(-3) = 9 \quad f'(-1) = -3 \quad f'(1) = 9$



Dari diagram tanda tersebut diperoleh interval berikut.

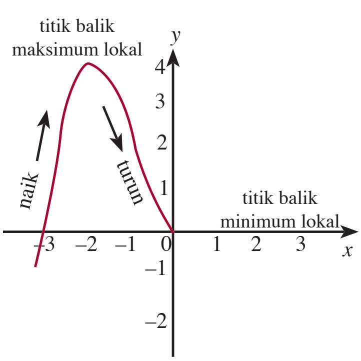
- Interval fungsi naik pada $x < -2$ dan $x > 0$.
- Interval fungsi turun pada $-2 < x < 0$.

c. Titik balik maksimum dan minimum lokal dapat ditentukan dari diagram tanda.

- Pada $x = -2$, $f(x)$ berubah dari fungsi naik menjadi fungsi turun sehingga $x = -2$ adalah titik balik maksimum lokal.
  $f(x) = x^3 + 3x^2 \Leftrightarrow f(-2) = 4$
  Titik (–2, 4) adalah titik balik maksimum lokal.
- Pada $x = 0$, $f(x)$ berubah dari fungsi turun menjadi fungsi naik sehingga $x = 0$ adalah titik balik minimum lokal $f(x) = x^3 + 3x^2 \Leftrightarrow f(0) = 0$
  Titik (0, 0) adalah titik balik minimum lokal.

Langkah 3: *Membuat sketsa grafik*

Hasil sketsa grafik tampak pada Gambar 8.17.



Gambar 8.17

Tes Kompetensi Subbab H

Kerjakanlah pada buku latihan Anda.

Buatlah sketsa grafik fungsi berikut.

1. $f(x) = x^3 - x^2 - 14x + 11$

2. $f(x) = x^3 - 6x^2\ 9x + 1$

3. $f(x) = x^5 - x^4 + 14x^3 + 6x^2 - 45x - 3$

Rangkuman

- Beberapa turunan fungsi aljabar
  a. $f(x) = k$; k adalah konstanta fi $f'(x) = 0$
  b. $f(x) = x$ fi $f'(x) = 1$
  c. $f(x) = x^n$; n ŒR fi $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- Beberapa turunan fungsi trigonometri
  a. $f(x) = \sin x$ fi $f'(x) = \cos x$
  b. $f(x) = \cos x$ fi $f'(x) = -\sin x$
  c. $f(x) = \tan x$ fi $f'(x) = \sec^2 x$

Sekarang, lanjutkanlah rangkuman diatas.

Refleksi

Setelah Anda mempelajari Bab 8,

1. coba Anda tuliskan bagian-bagian dari bab ini yang telah dipahamai,
2. tuliskan pula hal-hal yang masih sulit untuk dipahami di buku latihan Anda.

Tes Kompetensi Bab 8

A. Pilihlah salah satu jawaban dan berikan alasannya.

1. Jika $f(x) = \frac{5x}{1+x}$ maka $f'(2)$ = ...
   a. $\frac{1}{4}$
   b. $\frac{5}{6}$
   c. $\frac{1}{2}$
   d. $\frac{7}{9}$
   e. $\frac{5}{9}$

2. Diketahui $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$. Nilai $f\left(\frac{1}{12}\pi\right)$ adalah ....
   a. $\frac{1}{3}$
   b. $\frac{2}{3}$
   c. 1
   d. $\frac{3}{2}$
   e. 3

3. $\frac{d}{dx}\left(x^3 - \frac{x}{x^2-1}\right)$ = ...
   a. $3x^2 + \frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}$
   b. $3x^2 - \frac{x^2-1}{\left(x^2-1\right)^2}$
   c. $x^2 + \frac{3x+1}{\left(x^2-1\right)^2}$
   d. $x^2 - \frac{3x+1}{\left(x^2-1\right)^2}$
   e. $3x^2 - \frac{3x+1}{\left(x^2-1\right)^2}$

4. Titik balik maksimum kurva $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ adalah ....
   a. $(-3, -36)$
   b. $(-1, -5\frac{1}{3})$
   c. $(1, 1\frac{1}{3})$
   d. $(3, -18)$
   e. $(3, 0)$

5. Ditentukan $f(x) = \frac{2}{1-x}$ dan $f''(x)$ adalah turunan kedua dari $f(x)$. Nilai dari $f''(-2)$ adalah ....
   a. $\frac{3}{25}$
   b. $\frac{5}{29}$
   c. $\frac{6}{29}$
   d. $\frac{4}{27}$
   e. $\frac{6}{27}$

6. Turunan pertama $f(x) = (2x - 1)\cos(3x + 1)$ adalah ....
   a. $(2x - 1)\sin(3x + 1) + 2\cos(3x + 1)$
   b. $(2x - 1)\cos(3x + 1) - 2\sin(3x + 1)$
   c. $2\sin(3x + 1) + 2(6x - 3)\cos(3x + 1)$
   d. $2\cos(3x + 1) + (2x - 1)\sin(3x + 1)$
   e. $2\cos(3x + 1) - (6x - 3)\sin(3x + 1)$

7. Turunan pertama fungsi $f(x) = \cos^5(4x - 2)$ adalah ....
   a. $5\cos^4(4x - 2)\ \sin(4x - 2)$
   b. $-5\cos^4(4x - 2)\ \sin(4x - 2)$
   c. $-20\cos^4(4x - 2)\ \sin(4x - 2)$
   d. $10\cos^3(4x - 2)\ \sin(8x - 2)$
   e. $-10\cos^3(4x - 2)\ \sin(8x - 2)$

8. Pada daerah asal $0 < x < 2$, grafik fungsi $y = x^3 - 2x^2 + 1$ bersifat ....
   a. selalu naik
   b. selalu turun
   c. naik, lalu turun
   d. turun, lalu naik
   e. turun naik berulang-ulang

9. Luas semua sisi balok 96 cm^2. Jika alasnya berbentuk persegi, paling besar balok itu dapat dibuat dengan volume ... cm^3.
   a. 0
   b. 54
   c. 64
   d. $64\sqrt{2}$
   e. 80

10. Diketahui luas lingkaran merupakan fungsi dari kelilingnya. Jika keliling sebuah lingkaran adalah x, laju perubahan luas lingkaran terhadap kelilingnya adalah ....

a. πx
b. $2\pi x$
c. $\dfrac{x}{2\pi}$
d. $\dfrac{x}{\pi}$
e. $\dfrac{2x}{\pi}$

11. Turunan pertama fungsi $f(x) = \cos^3 (5 - 4x)$ adalah ....

a. $-12 \cos^2 (5 - 4x) \sin (5 - 4x)$
b. $12 \cos (5 - 4x) \sin (5 - 4x)$
c. $12 \sin^2 (5 - 4x) \sin (5 - 4x)$
d. $-6 \sin (5 - 4x) \sin (10 - 8x)$
e. $6 \cos (5 - 4x) \sin (10 - 8x)$

12. Nilai maksimum dari $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ pada interval $-1 \leq x \leq 3$ adalah ....

a. 16
b. 4
c. 3
d. 1
e. 0

13. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 6$ naik pada interval ....

a. $-2 < x < -\dfrac{2}{3}$
b. $\dfrac{2}{3} < x < 2$
c. $x < -2$ atau $x > \dfrac{2}{3}$
d. $x < \dfrac{2}{3}$ atau $x > 2$
e. $x < -\dfrac{2}{3}$ atau $x > 2$

14. Nilai maksimum dari $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x$ dalam interval $-3 < x < 4$ adalah ....

a. -160
b. -155
c. -131
d. -99
e. -11

15. Turunan pertama dari $f(x) = \dfrac{(x+2)^3}{(1-3x)^2}$, untuk $x = -3$ adalah ....

a. 0,000024
b. 0,00024
c. 0,0024
d. 0,024
e. 0,24

16. Turunan dari $y = (1 - x)^2 (2x + 3)$ adalah ....

a. $(1 - x)(3x + 2)$
b. $(x - 1)(3x + 2)$
c. $2(1 + x)(3x + 2)$
d. $2(x - 1)(3x + 2)$
e. $2(1 - x)(3x + 2)$

17. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 10$ turun dalam interval ....

a. $-5 < x < -1$
b. $x < -1$
c. $x < 1$
d. $1 < x < 5$
e. $x < 1$ atau $x > 5$

18. Kurva $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ turun pada interval ....

a. $x \leq 1$ atau $x \leq 3$
b. $-2 \leq x \leq 1$ atau $3 \leq x \leq 6$
c. $1 < x < 3$
d. $1 \leq x \leq 3$
e. $-1 \leq x \leq 1$

19. Nilai minimum relatif $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ adalah ....

a. -5
b. $-2\dfrac{2}{3}$
c. $-\dfrac{1}{3}$
d. $\dfrac{1}{3}$
e. 4

20. Jika $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x}$ dan $\sin x \neq 0$ maka $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = ...$

a. -2
b. -1
c. 0
d. 1
e. 2

B. Jawablah dengan singkat, tepat, dan jelas.

1. Gunakan konsep limit untuk menentukan turunan fungsi-fungsi berikut.
   a. $f(x) = \sin 2x$
   b. $f(x) = \cos (1–3x)$
   c. $f(x) = \tan x$
   d. $f(x) = 2x^4 – 7$
   e. $f(x) = 5x^3 – 5x$
   f. $f(x) = 2\sqrt{x} – 2x$
2. Sebuah peluru ditembakkan vertikal ke atas dengan kecepatan awal 10 m/detik. Kedudukan peluru setelah t detik memenuhi persamaan $h(t) = 60t – 7t^2$ dengan $h(t)$ adalah tinggi peluru yang diukur dalam meter.
   a. Tentukan kecepatan peluru pada saat 3,5 detik.
   b. Kapan peluru berhenti?
3. Diketahui $f(x) = \sqrt{x}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$.

   Buktikan bahwa $f\,'(x) = \dfrac{5x^4 + 3}{2\sqrt{x^5}}$.
4. Tentukan interval yang membuat fungsi-fungsi berikut merupakan fungsi naik atau fungsi turun.
   a. $f(x) = 5 + 8x – 2x^2$
   b. $f(x) = 2x^2 – 8x + 9$
   c. $f(x) = 9 + 3x – 4x^2$
   d. $f(x) = x^3 – 18x^2 + 10x – 11$
   e. $f(x) = 10 – 12x + 6x^2 – x^3$
   f. $f(x) = x^4 – 24x^2 + 10x – 5$
5. Sebuah kotak tanpa tutup, alasnya berbentuk persegi dengan sisi x cm, volumenya 32 cm^3. Jika kotak tersebut terbuat dari karton,
   a. tunjukkan bahwa luas karton yang diperlukan untuk membuat kotak itu $L(x) = x^2 + \dfrac{128}{x}$;
   b. tentukan ukuran kotak agar karton yang digunakan sesedikit mungkin.

Tes Kompetensi Semester 2

A. Pilihlah salah satu jawaban dan berikan alasannya.

1. Jika $f(x) = \sin x$ maka $f^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) = ...$
   a. 52 d. 0,71
   b. 41 e. 0,5
   c. 0,90

2. Jika $f(x) = 4x - 5$ dan $g(x) = 3^x$ maka $f(g(2)) = ...$
   a. 27 d. 31
   b. 9 e. 33
   c. 3

3. Jika $p(x) = 4x - 6$ dan $p(a) = 0$ maka $a = ...$
   a. -6 d. $\frac{2}{3}$
   b. 2 e. $-\frac{3}{2}$
   c. $\frac{3}{2}$

4. Jika $g(x) = \frac{x^2}{2x+1}$ maka $g(p^3) = ...$
   a. $\frac{p^6}{2p^3+1}$ d. $\frac{2p^6}{2p^3+1}$
   b. $\frac{p^6}{p^3+2}$ e. $\frac{p^3}{2p^6+1}$
   c. $\frac{2p^6}{p^3+1}$

5. Jika $g(x) = 3x + 2$ dan $g(f(x)) = x$ maka $f(2) = ...$
   a. 2 d. 8
   b. 6 e. 1
   c. 0

6. Jika $f(x) = 2x^2 - x$ maka $f(2x - 1) - 4f(x) + f(x) = ...$
   a. $-2x$ d. $2x^2 + 7x - 3$
   b. $2x^2 - 7x + 3$ e. $2x^2 + 7x + 3$
   c. $2x^2 + 3$

7. Jika $h(x) = f(g(x))$, $f(x) = 4 - x$ dan $g(x) = 2x + 1$ maka $h^{-1}(x) = ...$
   a. $\frac{3+x}{2}$ d. $\frac{2+x}{2}$
   b. $\frac{x-3}{2}$ e. $\frac{x+2}{2}$
   c. $\frac{3-x}{2}$

8. Invers dari $y = {}^2\log x$ adalah ....
   a. $y = x^2$ d. $y = 2x$
   b. $y = 2x$ e. 2^{x+1}
   c. $y = kx$

9. Diketahui $f(x) = x + 1$ dan $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 4$ maka nilai $g(4) = ...$
   a. 15 d. 52
   b. 16 e. 57
   c. 51

10. Jika $y = f(x) = \frac{1}{2}x + 3$, $z = \frac{1}{3}y + 2$ $w = f(z) = \frac{1}{4}z + 1$ maka fungsi komposisi dari x ke w adalah ....
    a. $\frac{1}{24}(x + 42)$ d. $\frac{1}{24}(4x + 18)$
    b. $\frac{1}{24}(2x + 7)$ e. $\frac{1}{12}(6x + 18)$
    c. $\frac{1}{24}(3x = 21)$

11. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x^2 - 11x + 10}{x - 2} = ...$
    a. -2 d. 2
    b. -1 e. 3
    c. 1

12. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} = ...$
    a. $2\frac{5}{6}$ d. $\frac{1}{6}$
    b. $1\frac{5}{6}$ e. $-\frac{5}{6}$
    c. $\frac{5}{6}$

13. Jika $\lim\limits_{x\to3} f(x) = 2$ dan $\lim\limits_{x\to3} g(x) = -4$ maka $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{2f(x)+5}{3g(x)} = ...$

a. $-\dfrac{3}{4}$
d. $\dfrac{3}{4}$
b. $-\dfrac{1}{2}$
e. $\dfrac{1}{2}$
c. $\dfrac{1}{4}$

14. Diketahui $f(x) = \begin{cases} 4x-3 & \text{jika } x \neq 3 \\ 5 & \text{jika } x = 3 \end{cases}$ maka nilai $\lim\limits_{x\to3} g(x) = ...$

a. 5
d. 15
b. 9
e. 18
c. 12

15. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x} = ...$

a. –2
d. 1
b. –1
e. 2
c. 0

16. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 3x - \sin 2x}{x} = ...$

a. –2
d. 1
b. –1
e. 2
c. 0

17. Jika $f(x) = \dfrac{x^2}{ax^2+b}$ maka $f'(-1) = ...$

a. $\dfrac{2b}{a+b}$
d. $-\dfrac{2b}{a+b}$
b. $\dfrac{2b}{(a+b)^2}$
e. $-\dfrac{2b}{(a+b)^2}$
c. $-\dfrac{a+b}{2b}$

18. Jarak suatu titik dari suatu posisi P untuk setiap waktu t dirumuskan $s(t) = A \sin t$, $A > 0$. Kecepatan terbesar diperoleh pada waktu $t = ...$

a. $2k\pi, k = 0, 1, 2,...$
b. $2k\pi, k = 1, 3, 5,...$
c. $2k\pi, k = 0, 2, 4,...$
d. $k\pi, k = \dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}, \dfrac{9}{2}, ...$
e. $k\pi, k = \dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{2}, \dfrac{11}{2}, ...$

19. Jika $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$ maka $f'(1) = ...$

a. $-\dfrac{8}{9}$
d. $\dfrac{8}{9}$
b. $-\dfrac{5}{9}$
e. $1\dfrac{5}{9}$
c. $\dfrac{5}{9}$

20. Nilai maksimum dari $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ pada interval $-1 \le x \le 3$ adalah ....

a. 16
d. 1
b. 4
e. 0
c. 3

21. Jika $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{-3}$ maka $\dfrac{df}{dx} = ...$

a. $-3\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^4 \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$
b. $-3\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{-4} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$
c. $-3\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^{-4} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$
d. $-3\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{-4} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$
e. $-3\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{-4} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

22. Turunan pertama fungsi $f(x) = \cos^2(5-4x)$ adalah ....

a. $-12\cos^2(5-4x)\sin(5-4x)$
b. $8\cos(5-4x)\sin(5-4x)$
c. $12\cos^2(5-4x)\sin(5-4x)$
d. $-6\sin(5-4x)\sin(10-8x)$
e. $6\cos(5-4x)\sin(10-8x)$

23. Jika $f(x) = \dfrac{x^2+4}{\sqrt{x}}$ maka $f'(4) = ...$

a. $\dfrac{1}{4}$
b. $\dfrac{3}{4}$

c. $\frac{9}{4}$

d. $\frac{11}{4}$

e. $\frac{15}{4}$

24. Nilai maksimum dari

$f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 2x^2 - 6x + 5$

dalam interval $-2 \le x \le 4$ adalah ....

a. 13 **d.** 6
b. 12 **e.** 5
c. 8

25. Jika $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 9}$ maka $f'(x)$ = ...

a. $\frac{-3x^2 + 38x + 27}{\left(x^2 + 9\right)^2}$

b. $\frac{3x^2 + 38x + 27}{\left(x^2 + 9\right)^2}$

c. $\frac{-3x^2 + 38x - 27}{\left(x^2 + 9\right)^2}$

d. $\frac{-3x^2 - 38x - 27}{\left(x^2 + 9\right)^2}$

e. $\frac{-3x^2 - 38x + 27}{\left(x^2 + 9\right)^2}$

26. Jika $f(x) = \frac{1}{2}\sin^2$ maka $f'(x)$ = ...

a. $\sin x + \cos x$
b. $\sin x - \cos x$
c. $\frac{\sin x}{\cos x}$
d. $\sin x \cos x$
e. $\sin x\,(1 - \cos x)$

27. Jika $f(x) = (2 - 4x)^5$ adalah $f'(x)$ = ...

a. $20(2 - 4x)^4$
b. $20(2 - 4x)^6$
c. $\frac{1}{6}(2 - 4x)^4$
d. $-(2 - 4x)^4$
e. $-20(2 - 4x)^4$

28. Jika $f(x) = -\cos x + \sin x$ maka $\frac{df}{dx}$ = ...

a. $\sin x + \cos x$
b. $\sin x - \cos x$
c. $\frac{\sin x}{\cos x}$
d. $x^2 \sin x$
e. $x \sin x^2$

29. Turunan pertama dari $f(x) = 5 \sin x \cos x$ adalah ....

a. $5\sin 2x$
b. $5\cos 2x$
c. $5\sin^2 x \cos x$
d. $5\sin x \cos^2 x$
e. $5\sin 2x \cos x$

30. Fungsi f yang dirumuskan dengan $f(x) = 5 + 3x + 4x^2$ turun pada interval ....

a. $-\frac{1}{3} < x < 3$
b. $-3 < x < \frac{1}{3}$
c. $x < -3$ atau $x > \frac{1}{3}$
d. $x < -\frac{1}{3}$ atau $x > 3$
e. $x < \frac{1}{3}$ atau $x > 3$

31. Jika $f(x) = -\frac{1}{2}\cos x^2$ maka $f'(x)$ = ...

a. $x \sin x$ **d.** $x^2 \sin x^2$
b. $x^2 \sin x$ **e.** $\sin x^2$
c. $x \sin x^2$

32. Suku banyak $f(x) = x^3 - 2x^2 + px + 6$ habis dibagi $(x - 1)$. Jika dibagi dengan $(x + 3)(x + 1)$, sisanya adalah ....

a. $16x + 24$ **d.** $24x - 16$
b. $16x - 24$ **e.** $-24x + 16$
c. $24x + 16$

33. Suatu suku banyak $P(x)$ dibagi oleh $(x^2 - 1)$ sisanya $(12x - 23)$ dan jika dibagi oleh $(x - 2)$ sisanya 1. Sisa pembagian suku banyak $P(x)$ oleh $(x^2 - 3x + 2)$ adalah ....

a. $12x + 23$ **d.** $23x - 12$
b. $12x - 23$ **e.** $-23x + 12$
c. $23x + 12$

B. Jawablah dengan singkat, tepat, dan jelas.

1. Diketahui $g(x) = \frac{x-1}{3-x}$ dan $[(f \circ g)]^{-1} = \frac{5+3x}{3+x}$. Tentukan nilai:
   a. $f(0)$
   b. $f(5)$
   c. $f(-2)$
2. Tentukan hasil bagi dan sisa suku banyak $3x^3 + 10x^2 - 8x + 3$ dibagi $x^2 + 3x - 1$.
3. Tentukan jenis nilai stasioner fungsi-fungsi berikut, menggunakan uji turunan kedua.
   a. $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$
   b. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 12x - 5$
   c. $f(x) = x^3 - 18x^2 + 10x - 11$
   d. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$
   e. $f(x) = x^4 - 24x^2 + 10x - 5$
   f. $f(x) = 7 + 3x + 4x^3 - x^4$
4. Misalkan, $s = f(t) = 24t^2 + 4t$ merupakan persamaan posisi mobil. Kecepatan mobil pada saat $t = 1$ jam dapat diperoleh dari limit kecepatan rata-rata dalam selang $t = 1$ sampai $t = 1 + \Delta t$, dengan mengambil $\Delta t \to 0$. Pernyataan ini dapat ditulis sebagai berikut.

$$V_{(t=1)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(1+\Delta t) - f(1)}{\Delta t}$$

   Tentukan kecepatan mobil pada saat $t = 1$.
5. Dengan menggunakan konsep limit, tentukan gradien singgung pada kurva berikut.
   a. $f(x) = 5x^2$ di titik $x = -2$
   b. $f(x) = x^2 + x - 5$ di titik $x = -1$
   c. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ di titik $x = -2$
   d. $f(x) = \sqrt{x} + x$ di titik $x = 4$
6. Hitunglah $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ untuk fungsi berikut.
   a. $f(x) = 2\cos(x - \pi)$
   b. $f(x) = -\cos x - \pi$
   c. $f(x) = 2\tan 3x$
7. Buatlah sketsa grafik fungsi berikut
   $f(x) = x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 23x + 8$

Tes Kompetensi Akhir Tahun

A. Pilihlah salah satu jawaban dan berikan alasannya.

1. Sebuah dadu dilempar satu kali. Peluang muncul mata dadu bilangan prima atau mata dadu bilangan 4 adalah ....
   a. $\frac{1}{12}$ d. $\frac{2}{3}$
   b. $\frac{1}{3}$ e. 2
   c. $\frac{1}{2}$

2. Jika titik $(-5, k)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 5y - 21 = 0$, maka nilai k adalah ....
   a. –1 atau –2 d. 0 atau 3
   b. 2 atau 4 e. 1 atau –6
   c. –1 atau 6

3. Agar garis $y = x + C$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$, maka nilai C adalah ....
   a. ± 1 d. $\pm 5\sqrt{2}$
   b. $\pm 2\sqrt{2}$ e. $\pm 6\sqrt{2}$
   c. $\pm 3\sqrt{2}$

4. Titik pusat lingkaran $x^2 + y^2 - ax + by + 9 = 0$ terletak pada garis $2x + 3y = 0$ di kuadran keempat. Jika jari-jari lingkaran itu sama dengan 1 maka nilai a dan b berturut-turut adalah ....
   a. –6 dan 4 d. 3 dan –2
   b. 6 dan 4 e. –3 dan 2
   c. 6 dan –4

5. Salah satu koordinat fokus $5x^2 + 4y^2 - 20x + 8y + 4 = 0$ adalah ....
   a. (1, –1) d. (2, –2)
   b. (2, –1) e. (–2, 1)
   c. (3, –1)

6. Persamaan lingkaran yang menyinggung $x - 2y + 2 = 0$ dan $2x - y - 17 = 0$ serta melalui titik (6, –1) adalah ....
   a. $\left(x - \frac{58}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{9}\right)^2 = \frac{500}{81}$
   b. $\left(x - \frac{54}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{15}{9}\right)^2 = \frac{482}{81}$
   c. $\left(x - \frac{50}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{12}{9}\right)^2 = \frac{400}{81}$
   d. $\left(x - \frac{48}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{9}\right)^2 = \frac{386}{81}$
   e. $\left(x - \frac{47}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{9}\right)^2 = \frac{348}{81}$

7. Persamaan garis singgung yang melalui titik (5, 1) pada lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ adalah ....
   a. $3x + 4y - 19 = 0$
   b. $3x - 4y - 19 = 0$
   c. $4x - 3y + 19 = 0$
   d. $x + 7y - 26 = 0$
   e. $x - 7y - 26 = 0$

8. Lingkaran $x^2 + y^2 - 2px + 6y + 49 = 0$ menyinggung sumbu–x untuk a ....
   a. 10 d. 1
   b. 7 e. –2
   c. 4

9. $(x-5)^2 + y^2 = 9$ bersinggungan dengan lingkaran ....
   a. $x^2 + y^2 = 1$ d. $x^2 + y^2 = 4$
   b. $x^2 + y^2 = 2$ e. $x^2 + y^2 = 5$
   c. $x^2 + y^2 = 3$

10. Lingkaran $x^2 + y^2 = 36$ berpotongan di dua titik yang berbeda dalam garis ....
   a. $x = 4$ d. $x = 10$
   b. $x = 6$ e. $x = 12$
   c. $x = 8$

11. Suku banyak $f(x) = x^3 - 2x^2 + px + 6$ habis dibagi $(x - 1)$. Jika dibagi dengan $(x + 3)(x + 1)$ sisanya adalah ....
   a. $16x + 24$ d. $24x - 16$
   b. $16x - 24$ e. $-24x + 16$
   c. $24x + 16$

12. Suatu suku banyak $P(x)$ dibagi oleh $(x^2 – 1)$ sisanya $(12x – 23)$ dan jika dibagi oleh $(x – 2)$ sisanya 1. Sisa pembagian suku banyak $P(x)$ oleh $(x^2 – 3x + 2)$ adalah ....
   a. $12x + 23$
   b. $12x – 23$
   c. $23x + 12$
   d. $23x – 12$
   e. $–23x + 12$
13. Sisa bagi dari $(4x^4 + 3x^3 – x + 4) : (x^2 + x – 2)$ adalah ....
   a. $12x + 22$
   b. $12x – 22$
   c. $–12x + 22$
   d. $–12x – 22$
   e. $22x – 12$
14. Diketahui suku banyak
   $f(x) = x^3 + ax^2 + bx – 6$.
   Jika suku banyak ini habis dibagi oleh $(x – 3)$ dan $(x – 2)$ maka sisa pembagian $f(x)$ oleh $x^2 + 5x + 6$ adalah ....
   a. $60(x + 1)$
   b. $–60(x + 1)$
   c. $60(x – 1)$
   d. $–60(x – 1)$
   e. $60(1 – x)$
15. Diketahui $P(x) = x^3 + 3x^2 + px + q$. Jika $P(x)$ dibagi $(x^2 + 2x – 3)$ sisanya $7x + 3$ maka nilai p dan q berturut-turut adalah ....
   a. 3 dan 2
   b. –3 dan 2
   c. –2 dan 3
   d. –6 dan 0
   e. 6 dan 0
16. Sebuah suku banyak berderajat n berbentuk $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x + a_0$, dengan $a_n \neq 0$, dan n bilangan positif dan $n \neq 0$. $P_3(x) – P_4(x)$ adalah suku banyak berderajat ....
   a. –1
   b. 1
   c. 3
   d. 4
   e. 7
17. Salah satu faktor dari $2x^3 – 5x^2 – px + 3$ adalah $(x + 1)$. Faktor linear yang lain dari suku banyak tersebut adalah ....
   a. $x – 2$ dan $x – 3$
   b. $x + 2$ dan $2x – 1$
   c. $x + 3$ dan $x + 2$
   d. $2x + 1$dan $x – 2$
   e. $2x – 1$dan $x – 3$
18. Persamaan $2x^3 + px^2 + 7x + 6 = 0$ mempunyai akar $x = 2$. Jumlah ketiga akar persamaan itu adalah ....
   a. –9
   b. $2\frac{1}{2}$
   c. 3
   d. $4\frac{1}{2}$
   e. 9

B. Jawablah dengan singkat, tepat, dan jelas.

1. Pada tes calon pramugari, tercatat hasil tes bahasa Inggris sebagai berikut.

Nilai	50	55	60	65	70	75	80
Frekuensi	7	9	12	5	3	3	2

   Seorang peserta dinyatakan lulus jika nilai ujiannya lebih tinggi dari nilai rataan hitung dikurangi 0,6. Berapa peserta yang dinyatakan lulus?
2. Ada 4 buah kartu as, kemudian diambil dua buah kartu. Berapa macam yang dapat dipilih jika:
   a. kartu yang pertama terambil tidak disimpan lagi;
   b. kartu yang pertama terambil disimpan lagi.
3. Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel, tentukanlah nilai dari
   a. sin 165°
   b. sin 255°
   c. cos 195°
   d. cos 285°
   e. tan 375°
   f. tan 405°
4. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik berikut.
   a. (0,3), (0,7), dan (2,7)
   b. (–2,–1), (7,2), dan (–1,–4)
   c. (–6,–5), (12,7), dan (–5,–10)
   d. (4,3), dan (–1,8), dan (2,7)
5. Jumlah dua bilangan bulat sama dengan 8. Tentukan bilangan-bilangan tersebut agar jumlah kuadratnya minimum.

Daftar Pustaka

Anton, Howard. 2004. *Aljabar Linier Elementer.* Edisi kedelapan. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Barnett A. Raymond, Ziegler R. Michael. 2008. *Applied Calculus for Business, Economics, Life Sciences, and Social Sciences*. Eleven Edition. New Jersey: Prentice Hall.

Bridgman, Roger. 2000. *Jendela IPTEK, Elektronika*. Jakarta: Balai Pustaka.

Dodge, Howard P. 2008. *Barron's How to Prepare for SAT II: Mathematics Level IIc*. Edisi Kedelapan. New York: Barron's Educational Series.

Gribbin, Mary, dan John Gribbin. 2000. *Jendela IPTEK, Ruang dan Waktu*. Jakarta: Balai Pustaka.

Negoro, ST dan B. Harahap. 2006. *Ensiklopedia Matematika*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

O 'Brien, Paul. 1995. *Understanding Year 11 Maths*. First Edition. Turramura NSW.

Parker, Steve. 1997. *Jendela IPTEK, Listrik*. Jakarta: Balai Pustaka.

Peng Yee, L., et all. 2003. *New Syllabus Mathematics*. Singapura: Shing Lee.

Purcell, E. J, Varberg, D. 2005. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid I dan II*. Edisi Kedelapan. Jakarta: Erlangga.

Rawuh, R, Hong, G. K, dan Tat, T. B. 1975. *Ilmu Ukur Ruang Teori dan Soal-Soal Jilid I*. Bandung: Terate.

Ruseffendi, E. T. 1989. *Dasar-Dasar Matematika Modern dan Komputer untuk Guru*. Edisi Keempat. Bandung: Tarsito.

Sullivan, M. 2007. *Precalculus*. Edisi Kedelapan. Chicago: Prentice Hall.

———. 1982. *The Official Guide to GMAT*. USA: Educational Testing Service Princeton.

Tim Redaksi Oxford Ensiklopedia Pelajar. 1995. *Oxford Ensiklopedia Pelajar, Listrik – Origami, Jilid 5*. Jakarta: Widyadara.

Washington, A. J. 2004. *Basic Technical Mathematics with Calculus*. Edisi Kedelapan. California: Addison Wesley Publishing Company.

Daftar Simbol

- $n!$: n faktorial
- $P(n, k)$: permutasi k unsur dari n unsur
- $C(n, k)$: kombinasi k unsur dari n unsur
- $P(A)$: peluang peristiwa A
- f_H : frekuensi harapan
- A^c : komplemen dari kejadian A
- $\in$: elemen atau anggota
- f : fungsi
- D_f : domain fungsi
- R_f : range fungsi
- $\varnothing$: himpunan kosong
- f^{-1} : invers dari f
- m : gradien
- $\bar{x}$: rata-rata
- Σ : jumlah total
- $\cup$: gabungan
- $\cap$: irisan
- Δx : perubahan x
- $|x|$: nilai mutlak x
- $\frac{dx}{dy}$: turunan pertama x terhadap y
- $\frac{d^2x}{dy^2}$: turunan kedua x terhadap y
- $\lim\limits_{x \to a}$: limit x menuju a
- sin : sinus
- cos : kosinus
- tan : tangen

Indeks

Senarai

A

Algoritma: prosedur matematika untuk memecahkan masalah matematis di langkah-langkah terbatas • 119

Aljabar: cabang matematika yang menggunakan benda-benda dan huruf-huruf untuk menggambarkan atau mewakili angka-angka • 152

Analisis: penyelidikan terhadap suatu kejadian untuk mengetahui keadaan yang sebenarnya • 242

Aturan Sturgess: aturan yang menjelaskan cara membagi data berukuran besar ke dalam kelas-kelas tertentu • 15

B

Binomial Newton: persamaan yang menggambarkan penjabaran bentuk aljabar dua suku yang dipangkatnya • 54

Bijektif: perpetaan f dari himpunan A pada himpunan B yang bersifat injektif dan surjektif • 76

D

Data: kumpulan informasi atau fakta, baik berupa angka maupun kategori • 1

Datum: informasi atau data tunggal • 3

Derajat: satuan ukuran sudut • 75

Desil: nilai yang membagi data menjadi 10 kelompok sama banyak • 32

Diferensial: teknik numerik untuk memperkirakan turunan $f(x)$ dari suatu fungsi • 130

F

Faktorial: hasil kali bilangan asli secara berurutan • 47

Frekuensi: jumlah (kekerapan) pemakaian unsur • 17

G

Gradien: kemiringan garis • 96

Grafik: lukisan pasang surut suatu keadaan dengan garis atau gambar • 11

H

Horizontal: garis datar atau mendatar • 12

I

Imajiner: hanya terdapat di angan-angan (tidak nyata) • 102

Invers: pembalikan posisi/arah • 145

K

Komplemen: sesuatu yang melengkapi atau menyempurnakan • 68

Koefisien: bagian suku yang berupa bilangan atau konstan yang biasanya dituliskan sebelum lambang peubah • 33

Konstanta: lambang untuk menyatakan objek yang sama dikeseluruhan operasi matematika • 121

P

Polinom: suku banyak • 125

Populasi: keseluruhan objek yang hendak diteliti • 20

R

Relatif: tidak mutlak (nisbi) • 15

S

Sampel: bagian dari populasi statistik yang cirinya dipelajari untuk memperoleh informasi tentang seluruhnya • 3

Stasioner: tetap atau tidak berubah tentang jumlah nilai dan sebagainya • 228

Statistik: hasil analisis dan pengolahan suatu data • 1

Stokastik: mempunyai unsur peluang atau kebolehjadian • 73

Sudut: bangun yang dibuat oleh dua garis yang berpotongan di seluruh titik potongnya itu • 75

Suku: bilangan yang menjadi bagian dari jajaran bilangan • 119

T

Teorema: pernyataan yang harus dibuktikan kebenarannya • 83

Tembereng: bagian dari lingkaran yang terbatas sebagian dari keliling lingkaran • 95

Trigonometri: ilmu ukur tentang sudut dan sepadan segitiga • 75

U

Unsur: bagian terkecil dari suatu benda • 52

V

Variabel: faktor atau unsur ikut menentukan perubahan • 121

Variansi: besaran yang menunjukkan besarnya penyebaran data pada suatu kelompok data • 36

Vertikal: membentuk garis tegak lurus • 12

Kunci Jawaban

Bab 1 Statistika

Tes Kompetensi Bab 1

A. **1.** a **5.** d **9.** a **13.** a
3. e **7.** b **11.** a **15.** b

B. **1.** **a.** ukuran terkecil = 48
ukuran terbesar = 80
median = 65
$Q_1 = 50$, $Q_3 = 75$, $J = 32$,
$Jk = 25$

3. **c.** Triwulan ke I tahun1994

5. Anak tertua 42 tahun
Anak termuda 11 tahun

Bab 2 Peluang

Tes Kompetensi Bab 2

A. **1.** b **5.** e
3. a **7.** b

B. **1.** 720 cara
3. 170 cara
5. **a.** $\frac{60}{189}$ **b.** $\frac{40}{189}$

Bab 3 Trigonometri

Tes Kompetensi Bab 3

A. **1.** d **9.** c **17.** a
3. b **11.** c **19.** c
5. e **13.** a
7. c **15.** e

B. **1.** **a.**
$$= \sin\frac{\pi}{4}\cos\theta + \cos\frac{\pi}{4}\sin\theta - \sin\frac{\pi}{4}\cos\theta + \cos\frac{\pi}{4}\sin\theta$$
$$= 2\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta$$
$$= -2\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\theta$$
$$= \sqrt{2}\sin\theta \rightarrow \text{terbukti}$$

3. tan 2x = $4\sqrt{3}$

Bab 4 Lingkaran

Tes Kompetensi Bab 4

A. **1.** c **9.** c **17.** c
3. c **11.** b **19.** a
5. e **13.** e
7. c **15.** d

B. **3.** $4y - 3x + 25 = 0$ atau
$3y - 4x - 25 = 0$

5. $\sqrt{85}$

Tes Kompetensi Semester 1

A. **1.** c **11.** d **21.** b
3. c **13.** b **23.** e
5. c **15.** d **25.** e
7. a **17.** b **27.** e
9. a **19.** d **29.** d

B. **1.** **a.** Mean = 5,3
Modus = 5
Median = 5

d. Mean = 3,92
Modus = 2,7 dan 4,8
Median = 3,7

3. $\frac{15}{19}$

5. **a.** 3

Bab 5 Suku Banyak

Tes Kompetensi Bab 5

A. **1.** e **9.** c
3. e **11.** a
5. e **13.** c
7. c **15.** e

B. **1.** $f(-2) = -7$
$f(-1) = -4$
$f(0) = -1$
$f(1) = 2$
$f(2) = 5$

3. **a.** $2x^3 + x^2 + 6x + 17$,
sisanya 52

Bab 6 Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers

Tes Kompetensi Bab 6

A. **1.** a **11.** a **21.** b
3. a **13.** c **23.** d
5. b **15.** b **25.** c
7. e **17.** e **27.** b
9. a **19.** c **29.** e

B. **1.** **a.** $n = 4$ dan $n = 5$
c. $n = 9$

3. $p = 22{,}9$ dan $q = -5{,}9$

Bab 7 Limit

Tes Kompetensi Bab 7

A. **1.** a **9.** a
3. a **11.** d
5. b **13.** a
7. c **15.** e

B. **1.** **a.** 12 **d.** 1
c. $\frac{1}{2}$ **g.** 18

5. **a.** $\frac{3}{4}$ **c.** 1 **e.** 1

Bab 8 Turunan Fungsi dan Aplikasinya

Tes Kompetensi Bab 8

A. **1.** e **9.** c **17.** d
3. a **11.** d **19.** a
5. d **13.** d
7. c **15.** d

B. **1.** **a.** $2\cos 2x$
b. $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$

3. $f^{-1}(x) = \frac{5x^4 + 3}{2\sqrt{x^5}}$

5. **a.** terbukti
b. $x = 4$ cm

Tes Kompetensi Semester 2

A. **1.** d **11.** c **21.** d
3. c **13.** a **23.** a
5. c **15.** e **25.** e
7. c **17.** a **27.** d
9. b **19.** b **29.** c

B. **1.** **a.** $f(0) = -1$

3. **a.** nilai stasioner $4x - 8 = 0$
$x = 2$ atau $x = -2$
$f(2) = 4$ merupakan nilai balik maksimum
$f(-2) = -2$ merupakan nilai balik minimum

c. nilai stasioner $2x^2 - 36x + 10 = 0$
$x = 11{,}7$ atau $x = 0{,}3$
$f(11{,}7) = -756{,}4$ merupakan nilai balik maksimum
$f(0{,}3) = -0{,}62$ merupakan nilai balik minimum.

Tes Kompetensi Akhir Tahun

A. **1.** d **5.** b **13.** a **17.** b
3. d **11.** b **15.** d

B. **1.** 13 orang

3. **a.** $\frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - 2\right)$
b. $-\frac{1}{4}\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + 1\right)$
c. $\dfrac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}}$

5. $a = 4$ dan $b = 4$

ISBN 979-462-978-2

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 34 Tahun 2008 tanggal 10 Juli 2008 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

HET (Harga Eceran Tertinggi) Rp...................